

Systemes bouclés

- Rédaction du cours et travail expérimental associé :

Jean-Baptiste Desmoulin (P.R.A.G.)
mail : desmouli@physique.ens-cachan.fr

Sommaire

Chapitre A :

Présentation de la transformée de Laplace et application aux systèmes étudiés

Chapitre B :

Fonction de transfert et stabilité.

Chapitre C :

Systèmes rendus volontairement instables : les oscillateurs.

Oscillateurs étudiés :

- Oscillateur à pont de wien.
- Exemple d'oscillateur à quartz.

Chapitre D :

Systèmes bouclés stables : application à l'asservissement d'une grandeur physique.

Systèmes asservis étudiés :

- Vitesse d'un moteur à courant continu.
- Flux lumineux d'une photodiode.
- Boucle à verrouillage de phase.

Quelques notions importantes sur les systèmes bouclés

L'objectif de ce cours est de présenter quelques notions générales sur les oscillateurs et les systèmes asservis. Le cours commence par une présentation sommaire de la transformée de Laplace qui sera l'outil principal utilisé pour formaliser les modèles employés. Il se poursuit par quelques définitions relatives aux systèmes bouclés et par une présentation de critères permettant de discuter de leur stabilité. On présente alors successivement le cas de systèmes rendus volontairement instables (les oscillateurs) puis le cas de systèmes pour lesquels on recherche absolument la stabilité (les systèmes asservis).

I. Présentation de la transformée de Laplace, application aux systèmes étudiés.

I.1. Systèmes étudiés:

Nous allons nous intéresser à des systèmes linéaires et invariants (ou stationnaires). Il s'agit, par exemple, de systèmes tels, que les relations entre les grandeurs d'entrée et les grandeurs de sortie peuvent se mettre sous la forme d'un ensemble d'équations différentielles linéaires à coefficients constants. Par ailleurs, si le système n'est pas rigoureusement linéaire, on arrive tout de même souvent à le linéariser autour d'un point de fonctionnement...

I.2. Transformée de Laplace:

La transformée de Laplace permet de remplacer les équations différentielles qui relient les grandeurs caractéristiques de nos systèmes par des relations à base de fractions rationnelles.

I.2.1. Définition.

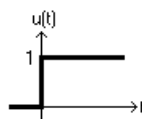
• Considérons une fonction f de la variable réelle t supposée nulle pour les valeurs négatives de t . La transformée de Laplace de f , notée F est une fonction de la variable complexe p définie par

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-p.t} . f(t). dt$$

Cette fonction n'est définie que pour les valeurs de p telles que l'intégrale converge... La convergence de cette intégrale impose notamment que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (f(t).e^{-p.t}) = 0$$

• rq: Les fonctions étudiées dans le cas des asservissements sont causales (nulles pour des valeurs de t négatives). Toutes les fonctions causales peuvent se mettre sous la forme du produit d'une fonction par l'échelon de Heaviside $u(t)$.



I.2.2. Propriétés.

- unicité.
- linéarité.

I.2.3. Formules.

Si L représente l'action "transformée de Laplace" et si $F(p)$ est la transformée de Laplace de $f(t)$, alors, on a les relations suivantes:

$$L[f(a.t)] = \frac{1}{a} . F\left(\frac{p}{a}\right)$$

$$L[f(t - \tau)] = e^{-\tau.p} . F(p)$$

$$L[e^{-\omega.t} . f(t)] = F(p + \omega)$$

$$L\left(\frac{df(t)}{dt}\right) = p.F(p) - f(0^-)$$

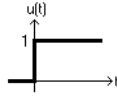
$$L\left[\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right] = p^2 . F(p) - p.f(0^-) - f'(0^-)$$

$$L\left[\int_0^t f(x).dx\right] = \frac{F(p)}{p}$$

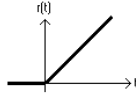
• Produit de convolution:
$$L\left[\int_0^{+\infty} f(\tau).g(t - \tau).d\tau\right] = F(p).G(p)$$

I.2.4. Transformée de Laplace de signaux particuliers.

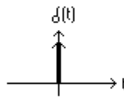
• échelon $u(t) : L[u(t)] = \frac{1}{p}$



• fonction rampe : $r(t) = a.t.u(t) \quad L[r(t)] = \frac{a}{p^2}$



• Impulsion de Dirac $\delta(t)$ (nulle partout sauf en 0 et telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) = 1$) : $L[\delta(t)] = 1$



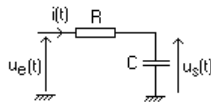
I.2.5. Théorème de la valeur finale :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (f(t)) = \lim_{p \rightarrow 0} (p.F(p))$$

Ce théorème n'est valable que si $F(p)$ n'a pas de pôles à partie réelle positive ou nulle (tous les pôles à partie réelle strictement négative). Il peut être utile pour connaître la réponse en régime permanent d'un système.

I.3. Définition de la fonction de transfert à partir d'un exemple:

Pour ne pas perdre de temps dans des calculs pénibles, nous allons étudier l'exemple simple suivant



Ce système peut être décrit par l'équation différentielle suivante:

$$u_e(t) = R.i(t) + u_s(t) = R.C. \frac{du_s(t)}{dt} + u_s(t)$$

Si on suppose la capacité initialement déchargée ($u_s(0)=0$), alors, en utilisant la transformée de Laplace, on obtient la relation:

$U_e(p) = R.C.p.U_s(p) + U_s(p)$ d'où la fonction de transfert du système

$$\frac{U_s(p)}{U_e(p)} = \frac{1}{1 + R.C.p}$$

Remarque: Pour l'instant, nous n'avons fait aucune hypothèse sur la forme de $u_e(t)$... Cette façon de définir la fonction de transfert est donc beaucoup plus générale que celle qui ne concerne que les systèmes en régime sinusoïdal forcé ($p = j.\omega$)...

Exemples de réponses:

• réponse à un échelon.

Si $u_e(t)=E.u(t)$ ($u(t)$ = échelon de Heaviside), alors $U_e(p) = E/p$. Dans ce cas, on a

$$U_s(p) = \frac{E}{p} \cdot \frac{1}{1 + R.C.p}$$

que l'on peut décomposer en fraction rationnelle ce qui donne

$$U_s(p) = E. \left(\frac{1}{p} + \frac{-R.C}{1 + R.C.p} \right) = E. \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p + 1/R.C} \right)$$

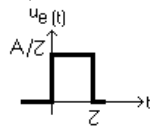
et en identifiant:

$$u_s(t) = E.u(t) - E.e^{-t/R.C}.u(t) = E.u(t).[1 - e^{-t/R.C}]$$

Ce qui est bien le résultat attendu...

- réponse à une fenêtre (impulsion de Dirac « réelle ») :

Cette fonction se présente sous la forme suivante (on a fait en sorte que son aire soit indépendante de τ):



avec $u_e(t) = (A/\tau).u(t) - (A/\tau).u(t - \tau)$

soit $U_e(p) = \frac{A/\tau}{p} \cdot (1 - e^{-\tau.p})$

Connaissant la fonction de transfert, on en déduit que

$$U_s(p) = \frac{A/\tau}{p} \cdot \frac{1}{1 + R.C.p} \cdot (1 - e^{-\tau.p})$$

et en identifiant

$$u_s(t) = (A/\tau)u(t).[1 - e^{-t/R.C}] - (A/\tau)u(t - \tau).[1 - e^{-(t-\tau)/R.C}]$$

- réponse à une impulsion de Dirac (« Aire » A)..

Cette réponse correspond à celle du cas précédent quand τ tend vers 0. On obtient alors

$$u_s(t) = (A/RC).e^{-t/R.C}.u(t)$$

- Cas du régime sinusoïdal forcé.

Si on pose $p=j.\omega$, la fonction de transfert prend la forme qu'on lui connaît en régime sinusoïdal forcé...ce régime correspond donc au cas particulier où p est imaginaire pur...

Remarque

Dans le cas où l'on considère des signaux quelconques, on peut définir les impédances des dipôles passifs en utilisant la transformée de Laplace :

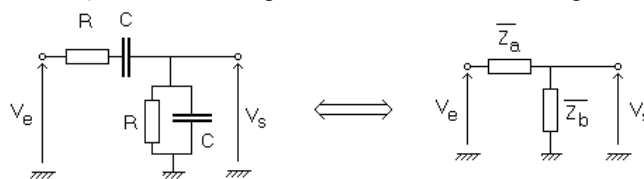
- Inductance : $u(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt}$ donne $U(p) = L.p.I(p)$ soit $\overline{Z_L} = L.p$

- Condensateur : $i(t) = C \cdot \frac{du(t)}{dt}$ donne $I(p) = C.p.U(p)$ soit $\overline{Z_C} = \frac{1}{C.p}$

Rq : Dans le cas particulier du régime sinusoïdal, $p = j.\omega$ et on retombe sur ce que l'on connaît déjà.

- Détermination de la fonction de transfert d'un filtre :

On considère le filtre suivant (on le retrouvera plus tard dans l'oscillateur à pont de Wien) :



La fonction de transfert de ce filtre vaut

$$\frac{\overline{V_s(p)}}{\overline{V_e(p)}} = \frac{\overline{Z_b}}{\overline{Z_a} + \overline{Z_b}}$$

avec $\overline{Z_a} = R + \frac{1}{C.p} = \frac{1 + R.C.p}{C.p}$

et $\overline{Z_b} = \frac{R}{R + \frac{1}{C.p}} = \frac{R}{1 + R.C.p}$

Finalement, on a

$$\frac{\overline{V_s(p)}}{\overline{V_e(p)}} = \frac{\frac{R}{1 + R.C.p}}{\frac{1 + R.C.p}{C.p} + \frac{R}{1 + R.C.p}} = \frac{1}{1 + \frac{(1 + R.C.p)^2}{R.C.p}} = \frac{1}{3 + \frac{1}{R.C.p} + R.C.p} = \frac{1/3}{1 + (1/3) \cdot \left[R.C.p + \frac{1}{R.C.p} \right]}$$

Cette fonction de transfert correspond, en régime harmonique à un filtre passe-bande de fréquence centrale $1/(2.\pi.R.C)$.

II. Fonction de transfert et stabilité.

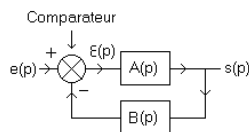
Dans cette partie, nous allons nous intéresser au problème de la stabilité des systèmes bouclés. Commençons par rappeler les définitions essentielles concernant ces derniers.

II.1. Rappels sur les systèmes bouclés.

Un système bouclé comprend au moins une boucle de rétroaction, destinée à ce que le signal d'entrée ait une action tempérée par le signal de sortie. L'objectif est souvent de permettre au système de réagir au mieux, sans action extérieure. Cependant, dans le cas des oscillateurs, le système bouclé est réalisé afin d'être maintenu dans un état instable.

II.1.1. Symbolique.

Un système bouclé peut se représenter par le schéma bloc suivant:



Dans un tel système, les blocs sont orientés. On peut notamment écrire que :

$$\varepsilon(p) = e(p) - B(p).s(p)$$

$$s(p) = A(p).\varepsilon(p)$$

On constate que le comparateur réalise une simple soustraction.

II.1.2. Définitions.

- ε est appelé signal d'erreur.
- $A(p)$ est la fonction de transfert de la chaîne directe.
- $B(p)$ est la fonction de transfert de la chaîne de retour.
- Le produit $A(p).B(p)$ représente la **fonction de transfert en boucle ouverte**.
- La **fonction de transfert en boucle fermée** du système est le rapport entre la sortie et l'entrée du système bouclé qui vaut

$$\frac{s(p)}{e(p)} = \frac{A(p)}{1 + A(p).B(p)}$$

II.2. Exemples de définitions de la stabilité.

Il existe plusieurs façons d'aborder la notion de stabilité. On peut notamment retenir qu'un système sera dit stable (au sens strict) si et seulement si, quand il est soumis à une impulsion de Dirac en entrée, il revient à sa position initiale de repos après un temps de relaxation.

On pourrait trouver bien d'autres définitions pour aborder ce problème. La définition employée dépend en général du type de système que l'on est amené à étudier.

II.3. Exemples de critères permettant de juger de la stabilité d'un système.

Nous allons présenter quelques techniques pour aborder la stabilité d'un système. Il faut noter qu'il en existe beaucoup d'autres...

Critère algébrique

Pour qu'un système linéaire soit stable au sens strict, il faut et il suffit que sa fonction de transfert **en boucle fermée** ne comporte pas de pôle à partie réelle positive ou nulle. Tous les pôles doivent donc être à partie réelle strictement négative.

On s'intéresse à un système dont la fonction de transfert est une fraction rationnelle. On supposera que le système finit toujours par couper, au-delà d'une fréquence donnée (cas de tout système physique), ce qui

implique que l'ordre du numérateur est inférieur à celui du dénominateur. La fonction de transfert peut alors se mettre sous la forme suivante :

$$T(p) = \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot p^i}{\sum_{k=1}^m \beta_k \cdot p^k} \quad \text{avec } n < m$$

Le dénominateur présente des pôles réels notés a_k et des pôles complexes notés $c_k + j \cdot d_k$. La fonction de transfert peut alors se mettre sous la forme suivante

$$T(p) = \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot p^i}{\sum_{k=1}^m \beta_k \cdot p^k} = \sum_{k=1}^{k_0} \frac{A_k}{p - a_k} + \sum_{k=k_0+1}^m \frac{B_k \cdot p + C_k}{(p - c_k)^2 + d_k^2}$$

On envoie une impulsion de Dirac d'« aire » K en entrée. La transformée de Laplace de la réponse est égale à celle de la fonction de transfert qui, compte tenu des hypothèses faites, peut se mettre sous la forme

$$S(p) = T(p) \cdot K \cdot \text{TL}(\delta(t)) = K \cdot T(p)$$

La réponse temporelle en sortie $s(t)$ peut donc s'écrire sous la forme

$$s(t) = K \cdot \left[\sum_{k=1}^{k_0} A_k \cdot e^{p_k \cdot t} + \sum_{k=k_0+1}^m D_k \cdot e^{c_k \cdot t} \cdot \sin(d_k \cdot t + \Phi_k) \right]$$

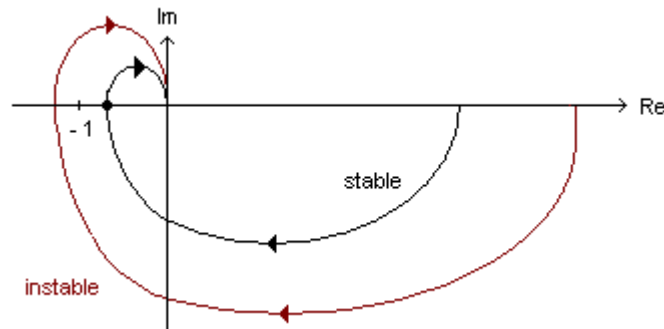
Si certains pôles p_i sont à partie réelle positive, on constate que la réponse $s(t)$ sera amenée à diverger quand t va tendre vers l'infini. Dans le cas de pôles à partie réelle nulle (pas de réel sens physique), il se peut que le système oscille.

Critères géométriques

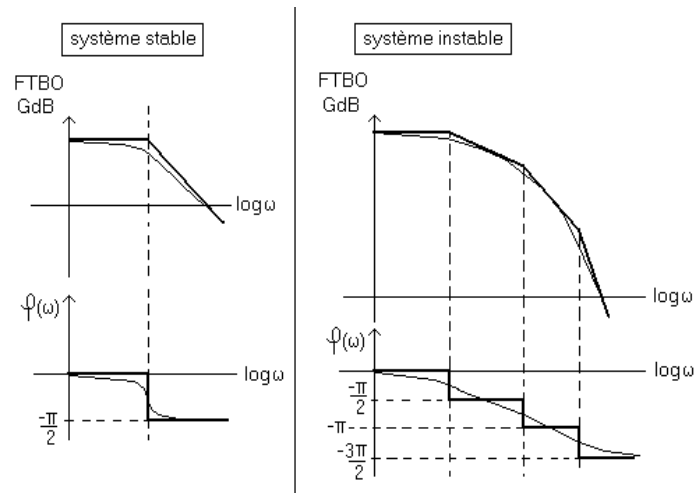
Critère simplifié pour les systèmes qui n'ont ni pôles ni zéros à partie réelle positive en boucle ouverte :

On s'intéresse à sa fonction de transfert en **boucle ouverte** (FTBO) du système bouclé étudié. On veut savoir si la fonction de transfert en boucle fermée (FTBF) est stable ou non. On trace le lieu géométrique défini par la FTBO en prenant $p=j\omega$ et on regarde la position de ce lieu par rapport au point -1 .

Si en parcourant le lieu pour des ω croissants, on laisse ce point sur la gauche, le système sera stable (critère du revers).



rq : **Le diagramme de Bode de la FTBO**, souvent utilisé pour tracer le lieu décrit par la fonction de transfert en boucle ouverte dans le plan complexe, permet également de juger de la stabilité, au même titre que le critère du revers. Dans ce cas, on dit que le système est stable quand le diagramme de Bode de la FTBO présente une phase de π pour un gain inférieur à 0dB (ou inférieur à 1 suivant l'échelle choisie).

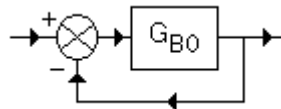


II.4. Influence du gain sur la stabilité à travers l'approche graphique.

Pour les systèmes bouclés usuels, on note qu'une augmentation du gain statique dans la boucle ouverte conduit souvent à se rapprocher d'un comportement instable, et même parfois à provoquer l'apparition d'oscillations.

Pour illustrer ce problème, nous allons supposer que nous avons réussi à identifier la fonction de transfert en boucle ouverte d'un système physique passe bas.

On réalise une rétroaction négative avec gain à retour unitaire. Le système bouclé peut alors être représenté par le schéma suivant



Pour différents types de fonctions de transfert de systèmes linéaires, nous allons discuter de la stabilité de la boucle fermée en fonction du gain maximum K , en utilisant les critères énoncés précédemment. L'étude sera davantage poussée avec le critère géométrique, car il est plus simple de généraliser les résultats dans ce cas.

En utilisant un critère géométrique (critère du revers), on constate que la stabilité sera obtenue si l'image de G_{BO} dans le plan complexe passe à droite du point -1 .

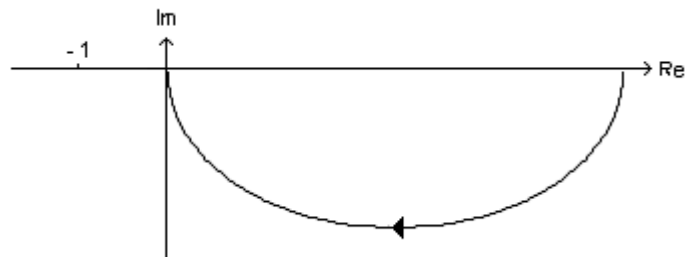
a/ Passe-bas d'ordre 1 :

La FTBO présente la forme suivante

$$G_{BO}(p) = \frac{K}{1 + \tau.p}$$

Le système présente un gain statique K supposé positif et une constante de temps τ .

Le lieu de Nyquist de ce système se présente sous la forme suivante



Quelle que soit la valeur de K positif, ce système sera stable puisque le point « -1 » restera sur la gauche.

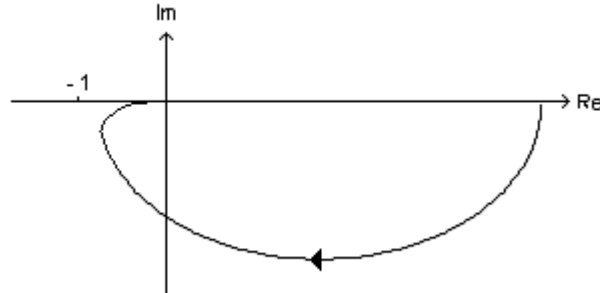
b/ passe-bas d'ordre 2 :

La FTBO présente la forme suivante

$$G_{BO}(p) = \frac{K}{1 + 2.m.\frac{p}{\omega_o} + \left(\frac{p}{\omega_o}\right)^2}$$

Le système présente un gain statique K supposé positif, un coefficient d'amortissement m et une pulsation caractéristique ω_o donnant l'ordre de grandeur de la pulsation de coupure.

Le lieu de Nyquist de ce système se présente sous la forme suivante

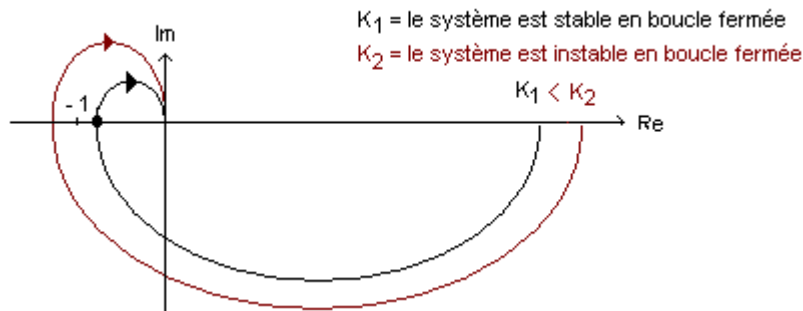


Quelle que soit la valeur de K positif, ce système sera stable puisque le point « -1 » restera sur la gauche.

c/ passe-bas d'ordre 3 :

$$G_{BO}(p) = \frac{K}{1 + \alpha.p + \beta.p^2 + \chi.p^3}$$

Quand ω augmente, le module décroît de K vers 0 alors que la phase décroît de 0 à $-3\pi/2$. Sur la figure suivante, on a représenté la fonction de transfert pour deux valeurs de K.



Si on est amené à augmenter K, le module de G_{BO} va augmenter pour une fréquence donnée, ce qui signifie que le risque de voir passer la courbe à gauche du point -1 sera plus fort. Augmenter le gain de la boucle ouverte augmente donc le risque d'instabilité.

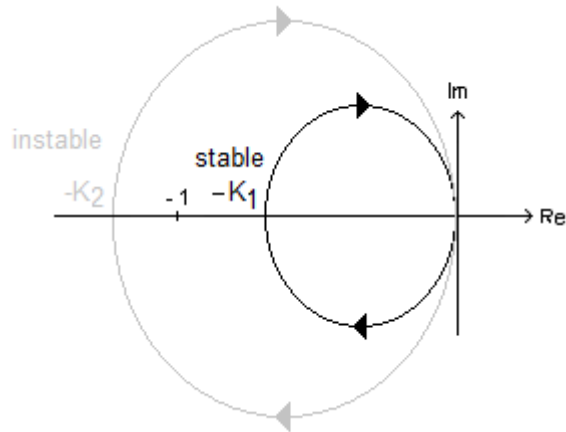
En pratique, avec des filtres passe-bas à gain statique positif, si l'ordre de la fonction de transfert en boucle ouverte est inférieur ou égal à 2, le système sera stable. Il deviendra potentiellement instable si l'ordre devient égal à 3 ou supérieur.

d/ passe-bande :

On considère un filtre passe-bande dont le gain maximum est négatif, égal à $-K$ et dont la fréquence centrale est ω_o .

$$G_{BO}(p) = \frac{-K}{1 + Q.\left(\frac{p}{\omega_o} + \frac{\omega_o}{p}\right)}$$

Le lieu de Nyquist de ce système se présente sous la forme suivante



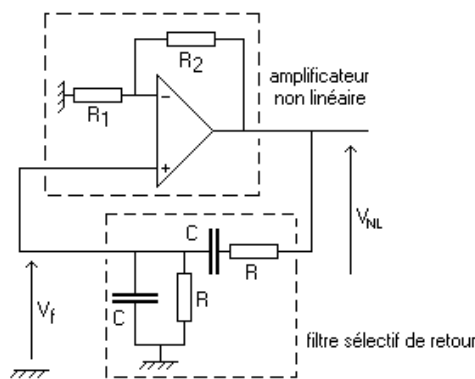
Si K est supérieur ou égal à 1 (cas de K_2), ce système sera instable. Sinon (cas de K_1), le système sera stable puisque le point « -1 » restera sur la gauche.

III. Systèmes rendus volontairement instables : les oscillateurs à travers un exemple.

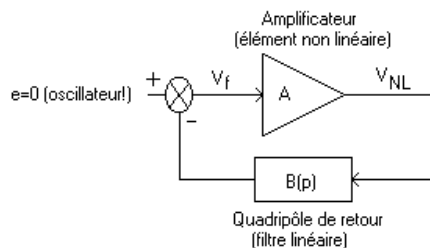
Nous allons nous contenter d'étudier l'exemple de l'oscillateur à pont de Wien. Cet oscillateur, quoi que peu performant, va nous permettre d'appliquer une méthode d'approche générale pour les oscillateurs quasi-sinusoïdaux à boucle de réaction. Il doit comporter un amplificateur non linéaire associé dans une boucle à une cellule résonante (filtre passe bande). Cette dernière comportant forcément des éléments dissipatifs, il va falloir apporter de l'énergie pour maintenir le système en oscillation.

Nous allons tout d'abord faire apparaître la structure générale d'un oscillateur de ce type en identifiant l'amplificateur et le filtre sélectif. Ceci étant fait, nous verrons la condition à vérifier pour que les oscillations apparaissent. Nous pourrons alors calculer les principales grandeurs attendues (fréquence et amplitude des oscillations notamment).

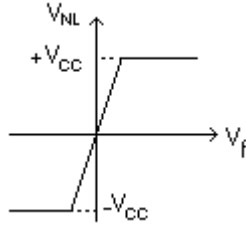
- Structure de l'oscillateur à pont de Wien. Identification des différents éléments.



On va essayer de se ramener à une symbolique de système bouclé classique (sauf qu'ici, on travaille à entrée nulle puisque l'on étudie un oscillateur...)



♦ Dans sa zone de fonctionnement linéaire, l'amplificateur a un gain $A=1+R_2/R_1$ (pour l'étude du démarrage, ce gain sera suffisant). Cependant la tension de sortie de l'amplificateur est limitée à la plage $[-V_{cc}; +V_{cc}]$. Sa caractéristique entrée-sortie, si on suppose l'amplificateur opérationnel parfait (excepté vis à vis de la saturation) est donc la suivante:



◆ Le filtre de retour est un filtre passe bande dont la fonction de transfert est la suivante

$$B(p) = \frac{-V_f}{V_{NL}} = -\frac{\frac{R}{1+R.C.p}}{\frac{R}{1+R.C.p} + R + \frac{1}{C.p}} = -\frac{R}{R + R + R^2.C.p + R + \frac{1}{C.p}} = \frac{-1}{3 + R.C.p + \frac{1}{R.C.p}} = \frac{-\frac{1}{3}}{1 + Q.\left(\frac{p}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{p}\right)}$$

(si on pose $\omega_0=1/RC$ et $Q=1/3$).

• Etude du démarrage des oscillations.

Le démarrage des oscillations vu en utilisant le critère algébrique de stabilité.

Nous avons vu, lors de l'étude de la stabilité des systèmes bouclés qu'un tel circuit sera instable lorsque l'un des pôles de sa fonction de transfert en boucle fermée a une partie réelle positive. Ces pôles sont les solutions de l'équation

$$A.B(p) = -1$$

Ils peuvent être calculés en résolvant l'équation

$$p^2 + \frac{\omega_0}{Q}\left(1 - \frac{A}{3}\right)p + \omega_0^2 = 0$$

On rappelle que $Q = 1/3$.

Le déterminant de cette relation vaut

$$\Delta = \left(\left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 \left(1 - \frac{A}{3}\right)^2\right) - 4.\omega_0^2 = \left(\frac{\omega_0}{3.Q}\right)^2 .(A^2 - 6.A + 9 - 36.Q^2) = \left(\frac{\omega_0}{3.Q}\right)^2 .(A^2 - 6.A + 5) \text{ si } Q=1/3$$

- Le déterminant de cette équation sera positif pour $A < 1$ ou $A > 5$. Dans ce cas, les racines sont réelles et valent

$$p_{\pm} = \frac{-3.\omega_0.(1 - A/3) \pm \sqrt{9.\omega_0^2.(1 - A/3)^2 - 4.\omega_0^2}}{2}$$

Si $A < 1$ les racines sont négatives (pas d'oscillations). Si $A > 5$ elles sont positives (oscillations).

- Si $1 < A < 5$, le déterminant est négatif et les racines sont complexes. On constate alors que leur partie réelle sera négative tant que $1 < A < 3$ (pas d'oscillations). En revanche, elle sera positive si $3 < A < 5$ (oscillations). Ces racines valent

$$p_{\pm} = \frac{-3.\omega_0.(1 - A/3) \pm j.\sqrt{-9.\omega_0^2.(1 - A/3)^2 + 4.\omega_0^2}}{2}$$

Le calcul des racines montre donc que le montage est instable pour $A > 3$. De plus, on peut dire que le démarrage sera pseudo-oscillant pour $3 < A < 5$ alors qu'il sera exponentiel croissant pour $A > 5$.

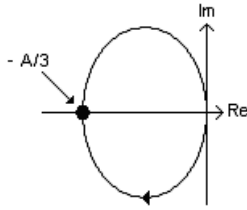
Le démarrage des oscillations vu en utilisant le critère algébrique de stabilité.

De la même façon, on peut utiliser le critère du revers pour déterminer si l'oscillation est susceptible d'apparaître ou non.

En effet, la fonction de transfert en boucle ouverte vaut

$$A.B(p) = \frac{-\frac{A}{3}}{1 + Q.\left(\frac{p}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{p}\right)}$$

En posant $p = j.\omega$, le lieu de la fonction de transfert en boucle ouverte dans le plan complexe, parcouru à ω croissant, présente la forme suivante :



On constate bien que si $A > 3$, l'instabilité va démarrer, puisque dans ce cas, le point « -1 » du plan complexe sera laissé sur la droite par le lieu tracé.

• Etude du régime permanent d'oscillation : fréquence et amplitude des oscillations.

- En régime permanent, la non linéarité de l'amplificateur se fait sentir et il n'est plus possible de raisonner aussi simplement que lors du démarrage. On va faire l'hypothèse dite du premier harmonique. Pour une amplitude de signal en entrée de l'amplificateur donnée, on regarde l'allure de la sortie (elle est affectée par la non-linéarité). De la sortie distordue, on extrait le premier harmonique. La non linéarité est alors modélisée par un gain linéaire \bar{N} équivalent, rapport du premier harmonique de la sortie sur l'entrée (ce gain remplace le gain A de l'étude du démarrage).

- Une fois \bar{N} calculé, la condition d'oscillation est donnée par

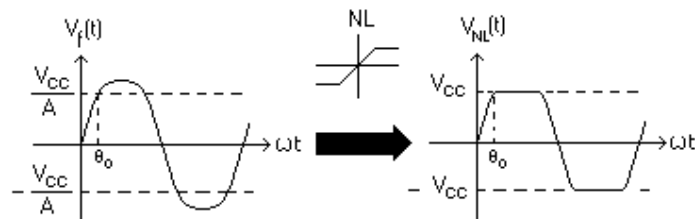
$$\bar{N}.B(j,\omega) = -1$$

La résolution de cette équation complexe nous donnera la fréquence des oscillations ainsi que leur amplitude.

- Dans le cas de notre exemple, nous allons calculer \bar{N} .

Nous allons supposer que $V_f(t) = V \cdot \sin(\omega.t)$ (V et ω sont les inconnues que nous recherchons).

$V_{NL}(t)$ vaut $A \cdot V_f(t)$ tant que $V_f(t)$ est inférieure, en valeur absolue, à V_{cc}/A . Sinon elle vaut $+V_{cc}$ ou $-V_{cc}$.



On constate que la non-linéarité n'introduit pas de déphasage (il n'y a pas d'hystérésis) ce qui signifie que le gain équivalent \bar{N} sera réel. L'amplitude du premier harmonique de V_{NL} est notée V_{NL1} et elle vaut

$$V_{NL1} = \frac{2}{T} \int_T V_{NL}(t) \cdot \sin(\omega.t) \cdot dt = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} V_{NL}(\theta) \cdot \sin \theta \cdot d\theta = \frac{4}{\pi} \left[\int_0^{\theta_0} A \cdot V \cdot \sin^2 \theta \cdot d\theta + \int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} V_{cc} \cdot \sin \theta \cdot d\theta \right]$$

Sachant que $V_{cc} = A \cdot V \cdot \sin \theta_0$, on trouve

$$\bar{N} = \frac{2 \cdot A}{\pi} \cdot \left(\theta_0 + \frac{\sin(2\theta_0)}{2} \right)$$

- La condition $\bar{N}.B(j,\omega) = -1$ nous donne que

$$\boxed{\omega = \omega_0} \quad \text{et que} \quad \boxed{\bar{N} = \frac{2 \cdot A}{\pi} \cdot \left(\theta_0 + \frac{\sin(2\theta_0)}{2} \right) = 3} \quad \text{ce qui permet de trouver V (approche graphique)}$$

rq : l'hypothèse du premier harmonique sera d'autant plus justifiée que les harmoniques ont peu d'incidence sur l'entrée de l'amplificateur, c'est à dire que le filtre de retour est sélectif. Dans la pratique, pour éviter une distorsion trop importante, ce qui peut être inacceptable dans certains cas (pour réaliser une porteuse par exemple), on va associer au circuit un dispositif de contrôle automatique de gain, ce qui permet de maintenir l'oscillateur en oscillation au voisinage du gain limite

• Améliorations indispensables pour un tel montage.

La fréquence d'oscillation du circuit précédent dépend beaucoup des conditions dans lesquelles le circuit est utilisé. Pour faire en sorte d'obtenir une fréquence plus stable, afin de réaliser une montre par exemple, il va falloir modifier les caractéristiques du filtre sélectif.

En effet, la relation $\bar{N}\bar{B}(j\omega) = -1$ permet d'écrire $\text{Arg}(\bar{N}) + \text{Arg}(\bar{B}(j\omega)) = \pi$ ce qui conduit à la fréquence d'oscillation. En différenciant la dernière relation, on trouve

$$\delta\theta + d\phi = 0 \text{ (si } \phi \text{ est l'argument de } \bar{B}) \text{ soit } \delta\theta = -\left(\frac{\partial\phi}{\partial\omega}\right)_{\omega_0} .d\omega$$

on peut alors écrire que $\frac{\delta\omega}{\delta\theta} \approx \frac{-1}{\left(\frac{\partial\phi}{\partial\omega}\right)_{\omega_0}}$

Dans le cas d'un filtre passe-bande de facteur de qualité Q et de gain A_o , on a

$$\bar{B}(p) = \frac{-A_o}{1 + Q\left(\frac{p}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{p}\right)} \approx \frac{-A_o}{1 + 2.j.Q.\frac{\delta\omega}{\omega_0}} \text{ si } \omega \approx \omega_0 \text{ soit } \phi \approx \pi - \text{Arc tan}\left(2.Q.\frac{\delta\omega}{\omega_0}\right) \text{ et donc } \frac{\delta\omega}{\delta\theta} \approx \omega_0 / 2.Q$$

Le fait que le filtre de retour ait un fort coefficient de qualité permet de rendre l'oscillateur moins sensible aux éventuelles variations d'état de l'amplificateur (si les variations donnent lieu une variation de phase de ce dernier...). C'est pourquoi on utilise souvent des oscillateurs à quartz, dans lesquels la cellule sélective de retour est réalisée à partir d'un composant piézoélectrique dont le comportement permet d'obtenir des facteurs de qualité supérieurs à 10000. Ce composant est notamment utilisé pour obtenir la seconde dans les montres...

IV. Système bouclé stable : application à l'asservissement d'une grandeur physique.

Dans de nombreux processus industriels, mais aussi dans bon nombre d'expériences scientifiques complexes, il est indispensable de maîtriser certains paramètres physiques afin de protéger les systèmes ou d'obtenir de leur part des comportements reproductibles.

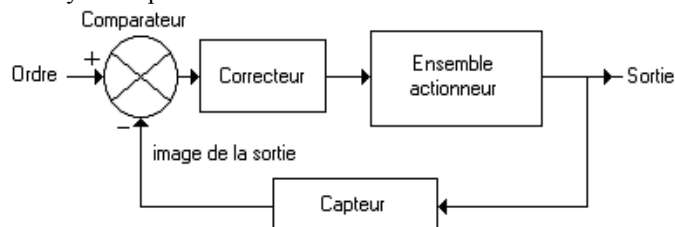
Exemples:

- Contrôle de température à réguler sans intervention humaine (corps humain, habitation, et tout système physique que l'on cherche à rendre le plus invariant possible vis-à-vis des fluctuations de température...).
- Contrôle d'un courant (amélioration de la réponse en couple d'un moteur, microscope à effet tunnel...).
- Contrôler le débit d'une source de tension malgré les fluctuations imposées par sa charge.
- Contrôle de position (robotique, positionnement fin de miroirs, compensation de vibrations...).
- Contrôle de la puissance optique émise par une source (éclairage d'une pièce, compensation de l'effet de la température sur la puissance émise par une diode laser...).
- Contrôler la vitesse d'un moteur (traction ferroviaire, obtention de la vitesse constante d'un escalator quel que soit le nombre d'usagers qui l'utilisent...).

Structure d'un système asservi:

Pour cela, on va être amené à concevoir des dispositifs dans lesquels un capteur rend compte de la sortie du système qui va devoir s'aligner sur ce que l'on a demandé en entrée. On a donc un système bouclé (réaction de la sortie sur le signal d'entrée).

On peut alors représenter le système par:



L'ordre donné en entrée est comparé avec l'image de la sortie fournie par le **capteur**. Le signal obtenu en sortie du **comparateur** (appelé souvent signal d'erreur ϵ) va permettre de commander la chaîne d'action composée de deux éléments principaux, le **correcteur** et l'**ensemble actionneur**.

Le rôle du correcteur est d'adapter le signal d'erreur afin d'obtenir une réponse optimale de l'actionneur. Les critères choisis peuvent être divers: précision, rapidité, stabilité... Nous verrons que ces derniers sont souvent antagonistes ce qui demande de faire des compromis. La forme du correcteur va dépendre des critères choisis...

L'actionneur est chargé de réaliser l'action demandée par l'ordre d'entrée, à partir du signal de sortie du correcteur. C'est en général l'élément qui apporte la puissance pour l'action.

remarque: Pour une action humaine, l'ensemble (comparateur-correcteur) sera réalisé par le cerveau alors que l'ensemble actionneur est constitué de l'ensemble (muscle-outil)... Le capteur peut être l'œil, l'oreille, le nez, la peau...

Définitions:

- Quand la grandeur de sortie suit une grandeur d'entrée qui varie dans le temps, on parle d'**asservissement** (asservissement de vitesse, de position...).
- Quand la grandeur de sortie suit une grandeur d'entrée constante, on parle plutôt de **régulation** (régulation de température, de pression...).

IV.1. Que cherche-t-on en réalisant un asservissement ?

Nous avons vu que le premier problème, quand on intègre un système physique dans une boucle fermée, c'est de savoir si l'ensemble va fonctionner de façon stable. Une fois que l'on s'est assuré d'une stabilité satisfaisante (assez robuste pour résister aux éventuelles fluctuations du système), il est possible d'améliorer certains aspects de la réponse du système bouclé, notamment la rapidité et la précision.

IV.1.1. Précision.

- Obtenir une bonne précision consiste à faire en sorte que la sortie du système finisse par tendre vers une valeur la plus proche possible de l'entrée. L'intérêt principal de la précision, c'est de permettre au système asservi d'atteindre, après un transitoire, un état de la sortie parfaitement défini, quel que soit l'état du système (penser au problème que peut poser la dérive d'un gain). Pour illustrer ce point, on va supposer que le système se présente sous la forme suivante :



- Améliorer la précision revient à dire que l'on cherche à **minimiser le signal d'erreur $\epsilon(t)$** quand t tend vers l'infini. En général, on a accès à la fonction de transfert. Il est, par conséquent, plus simple de travailler en variable de Laplace. C'est pourquoi on va utiliser le **théorème de la valeur finale** défini précédemment, soit

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \epsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \epsilon(p)$$

Le système sera donc réellement précis quand

$$\lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{E(p)}{1 + A(p)} = 0$$

Il faut noter que la précision dépend de la nature du signal d'entrée. Par la suite, on se limitera au cas de la réponse à un échelon de tension.

- Pour discuter de la précision, on peut également s'intéresser au gain statique du système. Si on étudie la réponse à un échelon, avoir un système précis revient à dire que ce système a un gain statique de 1 en boucle fermée. A vrai dire, il faut surtout que le gain statique soit un nombre, et non une grandeur qui dépend des paramètres physiques du système étudié. Si le gain est 2 ou tout autre nombre réel, on peut toujours dire que le système est précis. En fait, dans ce cas, le gain statique est différent de 1 car on a intercalé un gain en cascade avec la boucle fermée étudiée, en général pour appliquer un niveau de tension de commande plus simple à réaliser que celui délivré par la sortie de la boucle fermée.

Exemples :

- Considérons un système du premier ordre en boucle ouverte tel que

$$A(p) = \frac{K}{1 + \tau \cdot p}$$

On attaque ce système par un signal échelon. On a donc

$$E(p) = \frac{a}{p}$$

Dans ce cas l'erreur au bout d'un temps suffisamment long sera de la forme

$$\epsilon_{\infty} = \frac{a}{1 + K}$$

Pour diminuer cette erreur, on peut chercher à augmenter K , mais on risque alors de rendre le système instable si ce dernier n'est pas un « vrai premier ordre ». Tant que l'erreur statique n'est pas nulle, l'état de la sortie dépend de l'état du système à travers K .

- Supposons maintenant que le système soit tel que

$$A'(p) = \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{1 + \tau \cdot p}$$

Dans ce cas, si on applique un signal échelon en entrée, on aura une erreur ε qui tend vers 0 au bout d'un temps suffisamment long. La fonction de transfert $A'(p)$ peut être vue comme le produit de $A(p)$ par $1/p$. Ce dernier terme correspond à une intégration, opération que l'on peut réaliser avec un étage correcteur dont nous verrons la réalisation par la suite.

IV.1.2 Rapidité.

On s'intéresse à la durée nécessaire pour que le système atteigne le régime permanent. La rapidité est liée à la valeur des paramètres du système. Un système physique est d'autant plus rapide que sa bande passante est élevée... on peut par exemple penser à un système du premier ordre pour s'en convaincre.

Pour améliorer la rapidité du système, on va devoir agir sur le signal d'erreur... ce sera le rôle du correcteur, qui va en général amplifier ce dernier lors du régime transitoire afin d'amplifier la réponse de la chaîne directe. Il s'agit d'une sorte de coup de fouet au système.

L'inconvénient, c'est qu'augmenter la rapidité de la réponse peut conduire à un dépassement ou même une oscillation... Augmenter la rapidité revient la plupart du temps à rapprocher le système d'un régime de fonctionnement instable. On dégrade donc la stabilité.

C'est alors à l'utilisateur de faire un compromis entre avantages et inconvénients afin d'optimiser son asservissement...

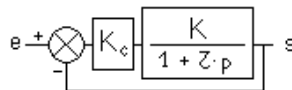
IV.2. Intérêt d'un élément correcteur.

Le correcteur est placé dans la chaîne directe. Il peut se présenter sous forme d'un circuit analogique ou sous forme d'un système numérique (convertisseur analogique numérique, mémoire, calculateur et convertisseur numérique analogique). Les correcteurs les plus simples réalisent principalement des fonctions de type « proportionnelle », « intégrale », « dérivée » ou une combinaison de certaines d'entre elles. On peut envisager d'autres actions (retard, ...) mais elles ne seront pas traitées par la suite.

IV.2.1. L'action proportionnelle.

- Une action proportionnelle permet de substituer, en entrée de la chaîne d'action, le signal $\varepsilon(t)$ à un signal $K\varepsilon(t)$ où K est un simple gain réel. Son rôle sera de dilater ou d'atténuer l'effet de l'erreur pour que le système réagisse de façon plus ou moins violente (comme si l'erreur était plus ou moins importante qu'elle ne l'est en réalité).

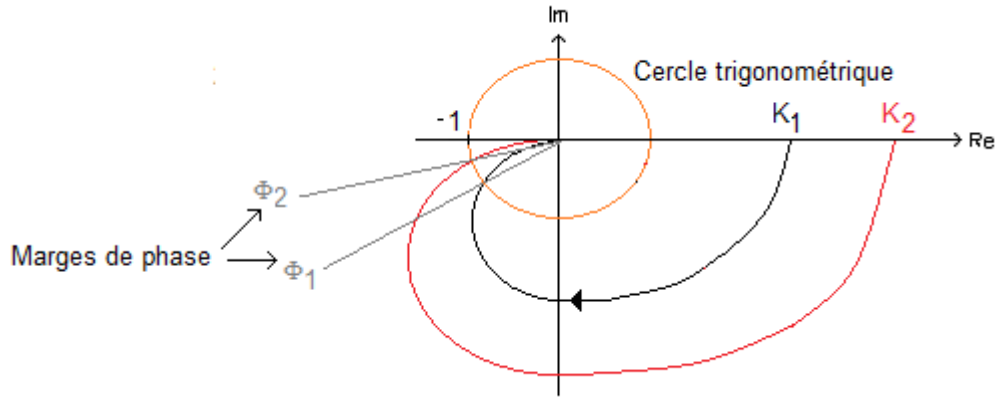
L'intérêt de l'action proportionnelle est en général de rendre le système plus rapide. Pour s'en convaincre, on peut prendre l'exemple d'un système en boucle ouverte de type passe-bas du premier ordre que l'on va associer, dans une boucle fermée avec un correcteur proportionnel.



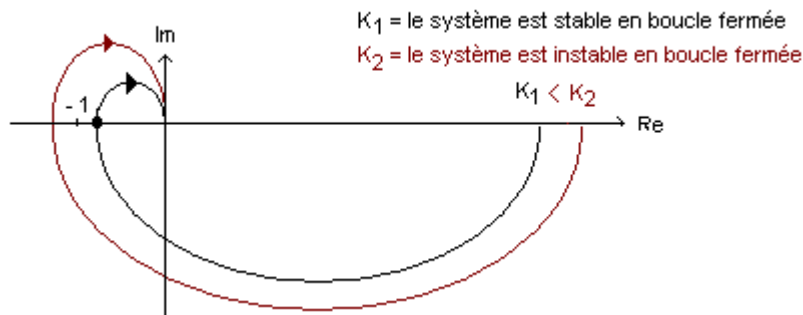
Si avant correction, on a $G_{BO}(p) = \frac{K}{1 + \tau \cdot p}$, alors $G_{BF}(p) = \frac{K \cdot K_c}{1 + \tau' \cdot p}$ avec $K' = \frac{K \cdot K_c}{1 + K \cdot K_c}$ et $\tau' = \frac{\tau}{1 + K \cdot K_c}$

On constate qu'en augmentant K_c , on va diminuer τ' et donc rendre le système plus rapide.

- Le risque d'un gain trop fort est l'apparition de dépassements qui peuvent être préjudiciables (surintensité mortelle pour le système électronique, ou dépassement de position d'un bras de robot à proximité d'un mur ou d'une personne...). Par exemple, pour un système passe-bas d'ordre 2, l'augmentation du gain va conduire à une diminution de la marge de phase, ce qui se traduit par une diminution du coefficient d'amortissement et donc des risques plus importants de dépassement.



• On peut même rendre le système instable si la fonction de transfert en boucle ouverte est passe-bas d'ordre supérieur ou égal à 3. On le constate en observant la valeur de la phase quand le module de la fonction de transfert en boucle ouverte avec correcteur vaut 1.



IV.2.2. L'action intégrale.

On attend souvent d'une action intégrale de supprimer une erreur statique. Tant qu'une erreur statique ε subsiste, elle va être intégrée ce qui va conduire à un signal en sortie du correcteur (entrée de la chaîne d'action) de plus en plus important. Le système va donc agir pour limiter l'erreur.

La commande intégrale peut être considérée comme progressive mais persévérante. Un automobiliste qui appuie sur l'accélérateur jusqu'à atteindre la vitesse désirée et maintenant l'accélérateur afin de conserver une vitesse constante réalise une action proportionnelle intégrale.

IV.3. Problème de la modélisation et de l'identification du système.

Pour asservir un système de façon convenable, il est nécessaire de connaître certaines de ses caractéristiques, afin d'élaborer un correcteur qui permettra d'obtenir des réponses plus satisfaisantes (rapidité de la réponse, précision...). Pour cela, deux approches (souvent complémentaires) sont possibles.

On peut soit élaborer un modèle physique de la chaîne à commander (modèle de connaissance), soit tester directement la réponse de cette dernière à des signaux particuliers et en déduire une forme approchée de la fonction de transfert (modèle de comportement). On se moque alors de ce qu'il y a dans le système... La première approche permet de comprendre le rôle des différents paramètres, ce qui la rend indispensable lorsque l'on cherche à réaliser une optimisation. En revanche, l'identification correcte d'un tel modèle est souvent délicate.

IV.3.1. Représentation des systèmes au moyen de modèles physiques.

C'est l'approche la plus satisfaisante pour le physicien, mais ce n'est pas toujours la plus efficace. En effet, elle est longue à mettre en œuvre et elle est dépendante des imperfections des modèles et de l'identification... Néanmoins, elle peut se révéler utile pour commander des systèmes complexes car elle permet d'avoir une idée approchée du rôle des différents paramètres... Le modèle obtenu est appelé **modèle de connaissance**...

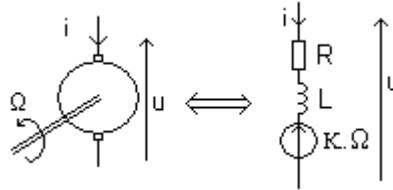
• Principe. Cette approche nécessite de connaître les caractéristiques physiques du système à commander. On obtient alors des systèmes d'équations différentielles que l'on va éventuellement devoir linéariser autour de points de fonctionnement. Au moyen de la transformée de Laplace, on peut alors remonter à la fonction de transfert du système.

Cette approche est longue à mettre en œuvre, car il faut mesurer un à un les paramètres du modèle... Elle n'est pas toujours très fiable. En effet, on est à la merci des erreurs de mesures lors de l'identification. De plus, un modèle est toujours une image (plus ou moins) simplifiée du réel...

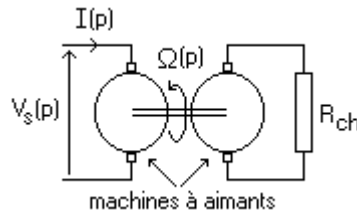
Néanmoins, si elle est bien conduite, elle va permettre de prévoir le comportement du système et éventuellement de le modifier pour optimiser certains paramètres, afin de rendre la commande plus facile et plus performante...

• Exemple de la réponse en vitesse d'une machine à courant continu.

Nous allons nous intéresser à une machine à aimants (on ne contrôle pas le flux d'excitation). Nous allons supposer que l'induit de la machine est de résistance R, d'inductance L (cette inductance comprend également l'inductance de lissage en sortie du hacheur quand on alimente la machine avec ce type de convertisseur) et que sa f.e.m. à vide E_v est donnée par la relation $E_v = K \cdot \Omega$, si Ω est la vitesse de rotation. Electriquement, on va donc représenter la machine à courant continu par le circuit suivant :



Nous supposons que l'ensemble fixé à l'arbre de la machine est de moment d'inertie J et que le moment du couple de frottement est négligeable.



rq : les banc de machines de faible puissance présentent des couples de frottements secs importants ce qui conduit à un moment de couple de frottements de forme $C = C_0 + f \cdot \Omega$. Cependant si la machine est chargée par une génératrice, on verra que le couple résistant appliqué par cette dernière est un couple de forme $C_r = K' \cdot \Omega$, ce qui permet de dire que le couple qui s'oppose au couple moteur a un moment pratiquement proportionnel à Ω .

Le modèle va permettre d'écrire les relations suivantes

• Equation électrique:
$$V_s(t) = R \cdot i(t) + L \cdot \frac{di(t)}{dt} + K \cdot \Omega(t)$$

 soit en variable de Laplace
$$V_s(p) = R \cdot I(p) + L \cdot p \cdot I(p) + K \cdot \Omega(p)$$

 d'où
$$I(p) = \frac{1}{L \cdot p + R} \cdot [V_s(p) - K \cdot \Omega(p)]$$

• Equation mécanique:
$$J \cdot \frac{d\Omega(t)}{dt} = K \cdot i(t) - C_{ch}(t)$$

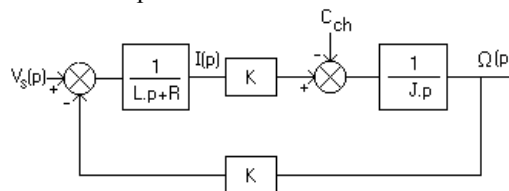
 soit en variable de Laplace
$$J \cdot p \cdot \Omega(p) = K \cdot I(p) - C_{ch}(p)$$

 ce qui permet d'écrire que
$$\Omega(p) = \frac{1}{J \cdot p} \cdot [K \cdot I(p) - C_{ch}(p)]$$

rq: $C_{ch}(t)$ est le moment du couple de charge

• Schéma bloc :

finalement, on peut représenter le moteur par le schéma suivant:



• Fonction de transfert tension-vitesse:

Pour le système utilisé, on a vu que

$$C_{ch} = \frac{K^2}{R_{ch}} \cdot \Omega = K' \cdot \Omega$$

Par calcul, on peut montrer que

$$T_{\Omega}(p) = \frac{\Omega(p)}{V_s(p)} = \frac{K_m}{1 + (T_{em} + \mu \cdot T_e) \cdot p + T_e \cdot T_{em} \cdot p^2}$$

avec $K_m = \frac{K}{K^2 + R \cdot K'}$, $\mu = \frac{R \cdot K'}{K^2 + R \cdot K'}$, $T_e = \frac{L}{R}$, $T_{em} = \frac{R \cdot J}{K^2 + R \cdot K'}$

Cette fonction correspond à un comportement de type second ordre. Elle peut être simplifiée en faisant certaines hypothèses sur la machine employée.

rq : on remarque qu'une variation de la charge entraîne une modification du modèle du système.

IV.3.2. Modélisation par une approche de type "boîte noire".

Cette fois, on se contente de savoir quelles sont les entrées et quelles sont les sorties. On envoie des signaux de test sur les entrées (créneaux, sinusoïde...) et l'étude des sorties nous conduit à un modèle mathématique du système. On parle alors de **modèle de comportement**.

Lorsque l'on met au point une modélisation très fine des systèmes que l'on étudie, on va souvent arriver à des modèles complexes et donc à des fonctions de transfert qui dépendent de très nombreux paramètres. C'est parfois intéressant pour comprendre l'incidence de différentes grandeurs physiques sur le comportement d'un système. En revanche, c'est très souvent difficile à exploiter directement en pratique. En effet, les paramètres sont d'autant plus difficiles à identifier précisément qu'ils sont nombreux. Pour identifier un modèle, par exemple lorsque l'on va chercher à asservir un système, on va souvent se contenter d'identifier un modèle simple (peut être parfois simpliste... c'est à l'expérimentateur de juger jusqu'où il peut aller). Pour nous, ce sera souvent un système passe bas du premier ou du second ordre.

rq : pour la coupure haute, elle s'explique par le fait que tout système physique cesse de répondre lorsqu'on le sollicite trop rapidement. La bande passante des systèmes n'est évidemment pas toujours aussi simple que celle d'un passe bas mais nous nous contenterons d'étudier ce type de cas par volonté de simplification. Par ailleurs, il arrive qu'un système plus complexe qu'un passe-bas puisse être considéré comme tel lorsque le spectre du signal d'entrée est assez étroit.

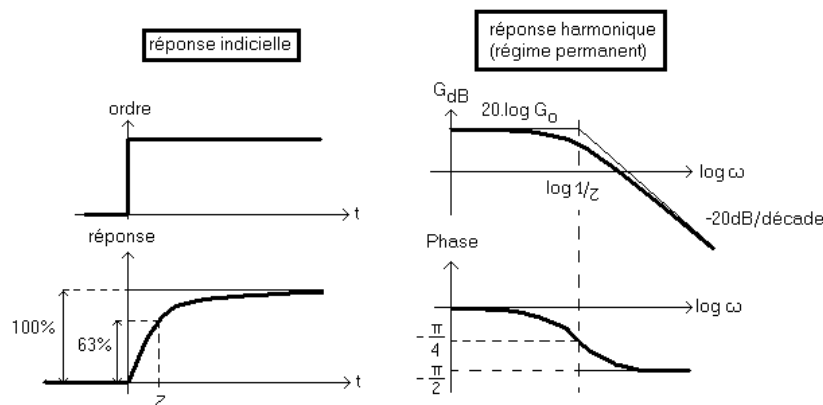
• Exemple : filtre passe-bas du premier ordre.

En terme de variable de Laplace, le gain d'un tel système va s'écrire de la façon suivante :

$$G(p) = \frac{G_0}{1 + \tau \cdot p}$$

G_0 et τ sont les paramètres caractéristiques du modèle (τ est la constante de temps).

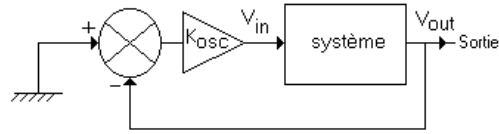
Pour identifier le système, on choisira soit la réponse à un échelon, soit la réponse fréquentielle.



IV.3.3. Système dont on ne connaît pas précisément la fonction de transfert :

Il n'est pas toujours indispensable de connaître précisément un modèle du système à asservir pour établir un correcteur. Il existe en effet des méthodes qui conduisent directement à un correcteur par interprétation de la réponse à une sollicitation donnée. On peut citer la méthode de Ziegler-Nichols bien adaptée à des systèmes

passer-bas potentiellement instables. Elle consiste à boucler le système sans signal d'entrée et à augmenter artificiellement le gain jusqu'à ce qu'il soit instable et entre en oscillation (on fabrique un oscillateur...).



En fonction de la fréquence d'oscillation observée, on en déduit les caractéristiques de la correction à réaliser pour assurer une stabilité robuste, tout en optimisant la rapidité et/ou la précision. Nous verrons un exemple d'identification de ce type dans la suite.

IV.4. Asservissement de vitesse d'une machine à courant continu.

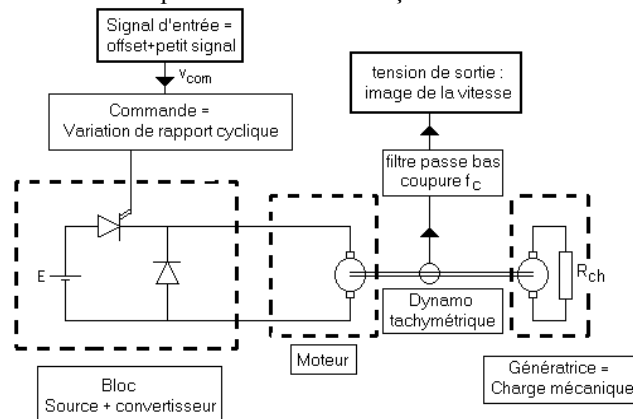
L'entrée du système en boucle ouverte est l'entrée de commande du hacheur. La sortie est celle de la dynamo tachymétrique.

Objectif.

Nous allons chercher à faire en sorte que la vitesse de la machine soit contrôlée par une tension de référence délivrée par un GBF. Notre objectif final est, qu'en l'absence de fluctuation de la tension du GBF, la vitesse soit insensible (sur une plage à déterminer) à une fluctuation d'un des éléments du système (nous verrons l'incidence de deux paramètres : la tension délivrée par l'alimentation de puissance qui sera découpée par le hacheur, ainsi que la charge mécanique sur l'arbre de rotation).

Analyse linéaire du système et remarques pratiques.

Le système en boucle ouverte étudié se présente donc de la façon suivante :



- L'ensemble (hacheur + moteur) peut être représenté par un filtre passe-bas du second ordre. Nous savons également que dans certains cas particuliers, quand les constantes de temps sont séparables, il est possible de négliger les plus élevées. C'est ce que nous ferons en supposant que le système est un passe-bas du premier ordre. On suppose donc que la constante de temps électrique est suffisamment faible devant la constante de temps mécanique pour être négligée (on fait donc implicitement l'hypothèse que les constantes de temps sont séparables...).

- La dynamo tachymétrique est une petite génératrice à courant continu destinée à fonctionner à vide. On supposera qu'elle est d'inertie suffisamment faible pour être considérée comme un simple gain scalaire dans la plage de fonctionnement étudiée, ce qui signifie qu'on négligera les effets de sa bande passante, potentiellement déstabilisants...

- Pour le filtre de la dynamo tachymétrique (parfois nécessaire car ces systèmes sont très bruités), nous choisirons une fréquence de coupure assez élevée pour pouvoir être négligée lors de l'identification, et assez faible pour pouvoir éliminer une partie des perturbations présentes sur le signal.

- Pour limiter le bruit, on peut par ailleurs mettre à la masse la carcasse des différentes machines (moteur, génératrice et dynamo tachymétrique) afin d'éviter des couplages capacitifs entre elles. On peut ainsi parfois éviter de placer un filtre.

- *Bilan* : Quand on dit que le système est du premier ordre, c'est que l'on a déjà négligé implicitement les constantes de temps apportées par la dynamo tachymétrique et le filtre qui lui sera associé ainsi qu'une partie de la coupure apportée par le moteur. Simplifier un modèle est une démarche courante. Reste à savoir jusqu'où on peut aller. C'est à l'expérience et au cahier des charges de nous le dire.

Nous verrons par la suite que le choix d'un modèle du premier ordre est assez rapidement contredit par les observations expérimentales. Cependant, si le correcteur déterminé à partir de l'identification de ce modèle simpliste suffit à obtenir une réponse en boucle fermée satisfaisante, notamment en terme de précision, il est inutile d'aller chercher un modèle plus complexe...

Éléments non-linéaires susceptibles de limiter la plage d'asservissement.

- Le hacheur est l'élément qui permet de contrôler la tension appliquée sur le moteur et donc la vitesse de ce dernier. Pour cela, on agit sur le rapport cyclique. C'est à ce niveau que se situe la principale non linéarité du système. Le rapport cyclique évolue entre 0 et 1 et ne peut pas sortir de cette plage, ce qui signifie que la tension de commande, qui est proportionnelle au rapport cyclique doit elle aussi rester dans une plage limitée pour que le fonctionnement soit linéaire.

Par exemple, pour le hacheur que nous avons utilisé, on a

$\alpha = 0$ si la tension de commande v_{com} est négative

$\alpha = k \cdot v_{com}$ si la tension de commande v_{com} est comprise entre 0 et 10V

$\alpha = 1$ si la tension de commande v_{com} est supérieure à 10V

Si E est la tension délivrée par l'alimentation stabilisée, la tension appliquée au moteur est comprise entre 0 et E , ce qui correspond à une plage de vitesse bornée, de 0 à Ω_{max} . Si on envoie une tension de commande destinée à conduire à une vitesse supérieure à Ω_{max} , alors le système va réagir de façon non-linéaire et la vitesse restera bloquée à Ω_{max} , avec $\alpha = 1$.

- Par ailleurs, il peut arriver que l'alimentation stabilisée utilisée sature en courant. On veillera donc, en début d'expérience, à ce que le niveau de courant que peut délivrer l'alimentation soit connu et réglé à une valeur assez forte pour pouvoir satisfaire la charge mécanique maximale que nous sommes susceptibles d'appliquer. Cette dernière dépend de la valeur minimale de R_{ch} et de la vitesse de fonctionnement.

Caractéristiques des signaux de tests à appliquer sur l'entrée du système en boucle ouverte.

En pratique, on va envoyer en entrée du système un signal qui est la somme d'une composante continue (offset) et d'un signal en créneau ayant une période valant quelques constantes de temps du système étudié. La composante continue et l'amplitude des créneaux sont choisis afin d'avoir un comportement linéaire. Par exemple, pour l'identification de la boucle ouverte, si la plage linéaire est entre 0 et 10V, on peut choisir une composante continue de 5V et un créneau d'amplitude 1V crête à crête afin de solliciter le système dans une zone suffisamment éloignée des effets non linéaires.

Pour la fréquence des créneaux, on fait en sorte que le fondamental de ce dernier soit dans la bande passante afin de pouvoir identifier correctement la réponse à l'échelon. Dans le cas contraire, la variation est trop rapide pour que le système puisse se rapprocher suffisamment du régime permanent ce qui signifie que les fluctuations d'entrée seront trop fortement filtrées. Dans le cas de l'étude d'un banc de moteur, compte tenu de l'ordre de grandeur des constantes de temps mécaniques, la fréquence des créneaux sera voisine du Hz.

Effet d'une perturbation en boucle ouverte.

En boucle ouverte, pour un niveau de signal d'entrée constant compris dans la zone linéaire, si on fait varier E sur une plage donnée on observe une variation de vitesse qui correspond à cette perturbation. Expérimentalement, on peut noter la relation entre la variation de E et celle de Ω .

De même, on peut faire varier brutalement la charge mécanique que la génératrice représente pour le moteur en faisant varier rapidement la résistance de charge R_{ch} branchée sur la seconde machine et mesurer la variation de vitesse correspondante une fois le régime permanent atteint.

Lorsque que le système aura été corrigé, l'asservissement permettra de compenser l'effet de la perturbation pour maintenir une vitesse constante en régime permanent, excepté durant un transitoire qui dépendra de la dynamique de la boucle. Cependant, il faut noter que ces remarques n'ont de sens que dans la mesure où la perturbation appliquée ne provoque pas l'apparition de phénomènes non linéaires.

Identification du système.

Pour la boucle ouverte sans correcteur, on va chercher à identifier la fonction de transfert suivante :

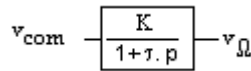
$$G_{BO}(p) = \frac{K}{1 + \tau \cdot p}$$

On récupère, à l'oscilloscope, la réponse à un échelon en utilisant bien tout l'écran et en faisant un moyennage pour éliminer le bruit.

Pour τ , on va rechercher directement à l'oscilloscope de temps de réponse à 63%.

Pour le gain, on peut appliquer un signal continu, dans la plage linéaire, en entrée, et faire le rapport de la tension de sortie sur la tension d'entrée. On peut également, en régime créneau faire le rapport de l'amplitude de la variation de sortie (quand on atteint le régime permanent), sur l'amplitude de la variation d'entrée.

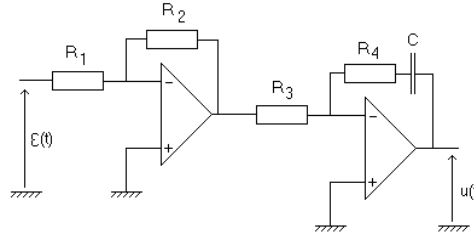
Donc pour l'instant, nous avons



Réalisation de la correction.

Pour faire en sorte que le système soit indépendant de perturbations extérieures comme une fluctuation de E ou du couple de charge, on réalise une correction de type proportionnelle intégrale, ce qui nous permet d'éliminer l'erreur statique.

Ce type de correcteur présente la structure suivante :



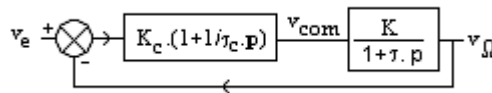
Son gain vaut

$$C(p) = \left(\frac{R_2 \cdot R_4}{R_1 \cdot R_3} \right) \cdot \left(1 + \frac{1}{R_4 \cdot C \cdot p} \right) = K_c \cdot \left(1 + \frac{1}{\tau_c \cdot p} \right)$$

Pour obtenir une réponse en boucle fermée satisfaisante, on choisit la constante de temps du correcteur pour compenser le pôle du système, c'est-à-dire que $\tau_c = \tau$. Dans ce cas, la nouvelle boucle ouverte, avec le correcteur est un intégrateur pur, ce qui signifie que la boucle fermée avec le proportionnel intégral est un passe-bas du premier ordre avec un gain statique égal à 1. Le système a donc un gain constant dans toute la bande passante et présente une réponse en régime permanent qui ne dépend pas des paramètres physiques de notre système.

Pour le gain, si le modèle identifié est satisfaisant, on peut jouer sur K_c pour rendre le système plus rapide. Dans un premier temps, on peut choisir K_c afin d'obtenir le même temps de réponse en boucle fermée corrigée que ce que l'on avait initialement en boucle ouverte sans le correcteur. On va ainsi éviter de faire apparaître les limites de notre modélisation dans un premier temps.

Une fois le système bouclé avec le correcteur, on a donc



Détermination de la plage d'asservissement.

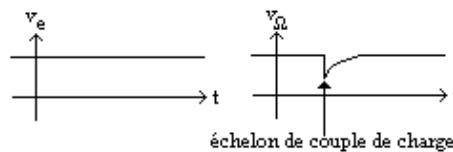
Une fois le correcteur réalisé et la boucle fermée, on applique, comme tension d'entrée un niveau continu. On remarque que la sortie suit parfaitement l'entrée sur une plage de tension limitée. En fait, comme la tension appliquée au moteur est comprise entre 0 et E, ce dernier ne peut tourner qu'entre 0 et Ω_{max} ce qui signifie que la dynamo tachymétrique ne peut délivrer que des tensions comprises entre 0 et $v_{\Omega_{max}}$. Si on donne un ordre avec une tension négative ou supérieure à $v_{\Omega_{max}}$, le système asservi ne pourra pas suivre et l'asservissement va décrocher.

Il est impératif de déterminer cette plage d'asservissement avant de continuer l'étude, car par la suite, tout ce que nous allons faire suppose que l'on travaille bien dans cette plage.

Fonctionnement en régulation : effet des perturbations en boucle fermée.

Avec une tension d'entrée constante dans la plage d'asservissement, on observe bien que la tension v_{Ω} suit parfaitement la tension d'ordre appliquée en entrée du comparateur v_e .

- Si on réalise une perturbation sur le couple de charge sur le moteur en modifiant brutalement la résistance R_{ch} , on observe que v_{Ω} s'écarte de v_e pendant un transitoire puis revient à v_e . Par exemple, si on diminue brutalement R_{ch} , on observe une diminution transitoire de la vitesse relative à échelon sur le couple de charge.



Pour que ce transitoire soit visible, il ne faut pas que le système soit trop rapide et que la perturbation soit suffisante.

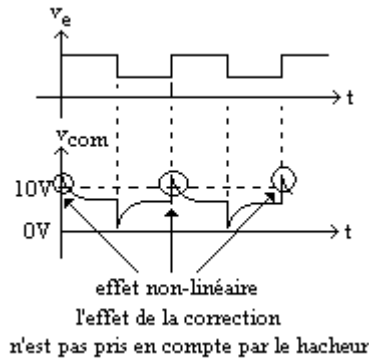
- Si on réalise une modification de E, tension délivrée par l'alimentation continue, on constate de même que v_{Ω} suit v_e en régime permanent. Si on diminue fortement E, on constate que l'asservissement finit par décrocher.

Alors, α vaut 1 et ne peut plus augmenter. Dans ce cas, v_{com} a dépassé 10V.

Fonctionnement en régime dynamique : rapidité stabilité et non linéarité.

- En appliquant en entrée, sur v_e , une tension qui est la somme d'une composante continue et d'un créneau, telle que l'ensemble est intégralement compris dans la plage d'asservissement, on va pouvoir observer la réponse sur v_Ω quand on augmente le gain K_c du correcteur proportionnel intégral. Dans un premier temps, on observe une diminution du temps de réponse conformément à ce qui est attendu, mais on va également observer l'apparition d'un dépassement ce qui n'est pas possible pour un système passe bas d'ordre 1. Le modèle que nous avons identifié était donc simpliste.

- Si on augmente encore K_c , on risque de voir apparaître un comportement non linéaire. Pour s'en assurer, il suffit d'observer le signal v_{com} appliqué en entrée du hacheur et de constater qu'il sort de la plage de fonctionnement linéaire de la commande du hacheur (de 0 à 10V pour notre système). Le signal v_{com} présente en effet l'allure suivante



La partie du signal qui sort de la plage comprise entre 0 et 10V n'est pas prise en compte. On n'améliore donc pas la dynamique autant que ce que l'on aurait voulu. Par ailleurs, les pics de v_{com} seront d'autant plus marqués que le gain K_c est élevé.

- Dans certains cas, on peut même faire apparaître une oscillation sur v_Ω , ce qui signifie que l'on a rendu le système instable. Cette observation confirme que le modèle de notre boucle ouverte est simpliste dans la mesure où l'oscillation n'est possible que pour un système d'ordre supérieur ou égal à 3. Cette oscillation ne sera pas toujours observable, car il arrive qu'elle soit rendue impossible par les effets non linéaires. Elle sera d'autant plus facile à observer que les systèmes ont des fréquences de coupures proches les unes des autres (dynamo tachymétrique dont l'inertie est voisine du moteur ou moteur présentant des fréquences de coupures mécaniques et électriques rapprochées).

- L'alimentation en courant du système constitue également une source importante de non-linéarité. Pour éviter les problèmes, on veillera à régler l'alimentation afin qu'elle débite un courant allant jusqu'à la valeur maximale supportée par le moteur, ou la valeur la plus proche possible de ce maximum. Si on appelle davantage, elle sature. Par ailleurs, lors des phases de décélération, le courant ne pouvant changer de signe avec ce type de hacheur, on risque d'observer un courant qui s'annule et reste bloqué à zéro. Le hacheur est alors en conduction discontinue.

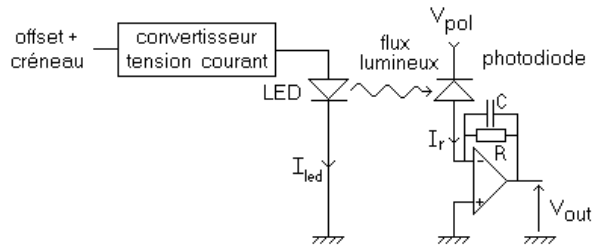
IV.5. Asservissement du flux lumineux émis par une LED.

Cet asservissement va nous permettre d'adopter une démarche différente de ce qui a été vu précédemment. Cette fois, on va faire en sorte, par une méthode empirique, de déterminer les caractéristiques d'un correcteur, sans connaître précisément les caractéristiques du système commandé. Le correcteur obtenu garantit la stabilité, sans que les autres performances du système (notamment la rapidité) ne soient trop altérées.

rq : il n'est pas nécessaire de connaître le système, mais il faut avoir conscience que les méthodes empiriques, qui sont fort nombreuses, et adaptées à des types de problèmes particuliers, ne fonctionnent pas systématiquement. Si on emploie une méthode plutôt qu'une autre, c'est que l'on a une petite idée du comportement général (sans le connaître précisément).

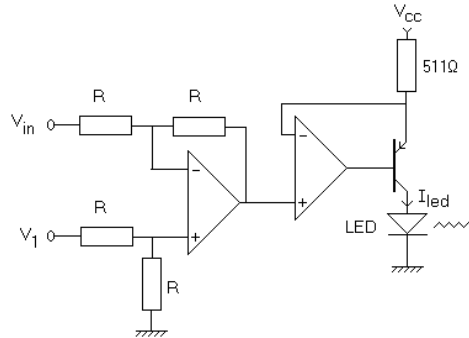
IV.5.1. Structure du système et analyse du problème.

Le système étudié se présente sous la forme suivante :



• le convertisseur tension/courant :

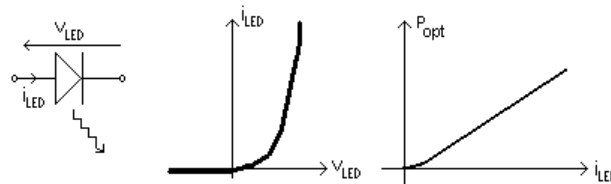
Le flux lumineux émis par la LED est contrôlé par le courant I_{led} . Ce courant est commandé par une tension au moyen d'un circuit électronique adapté (réalisé avec un transistor et des amplificateurs opérationnels). Il est réalisé de la façon suivante :



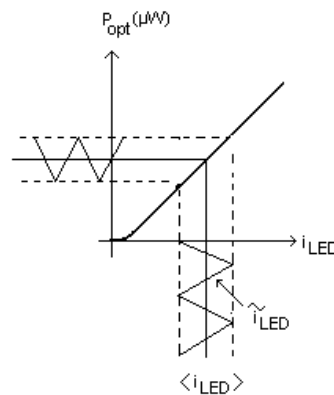
La tension V_1 est continue et permet de polariser correctement la LED. La tension V_{in} est une composante variable qui permet de moduler le faisceau. La polarisation de la LED se fait par l'intermédiaire d'une tension de polarisation V_{cc} à travers une résistance R_o . Avec ce système, on injecte, dans la LED un courant I_{led} , tel que

$$I_{led} = \frac{V_{cc} - (V_1 - \tilde{V}_{in})}{R_o}$$

• fonctionnement de la LED :



Pour moduler le flux émis par une LED, il faut injecter une composante continue de courant à laquelle on va ajouter une petite fluctuation, suffisamment faible pour rester dans la plage de courant conduisant à une réponse affine de la puissance optique. Grâce au circuit décrit précédemment, on va pouvoir fixer la composante continue de i_{LED} par $V_{cc} - V_1$ et moduler l'intensité lumineuse émise par V_{in} qui permet de contrôler l'ondulation de i_{LED} .

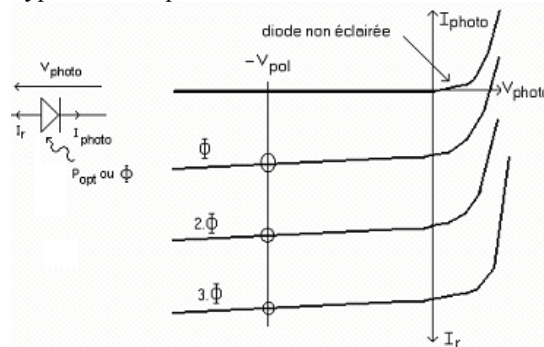


En régime dynamique, ce système va, comme tout système physique, avoir un temps de réponse ce qui va, dans notre cas, nécessiter de faire apparaître au moins une fréquence de coupure.

• fonctionnement de la photodiode :

Le flux lumineux émis par la LED va être en partie converti en courant par la photodiode. Ce courant I_r sera alors converti en tension V_{out} (plus facile à visualiser que I_r) au moyen d'un montage transconductance.

Régime statique : Compte tenu de la structure du montage transconductance, la photodiode est directement polarisée sous la tension $-V_{pol}$. Sur la figure suivante, on a représenté la caractéristique courant en fonction de la tension de la photodiode, pour différents flux lumineux reçus. En la polarisant en inverse on se retrouve donc sur des points de fonctionnement du type de ceux qui sont entourés.

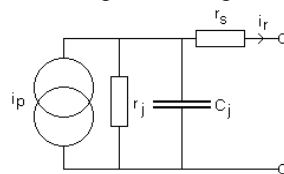


Dans ce cas, le courant inverse I_r dans la photodiode peut s'écrire, pour des éclaircissements suffisants

$$i_r = I_{obs} + K \cdot \Phi \approx K \cdot \Phi$$

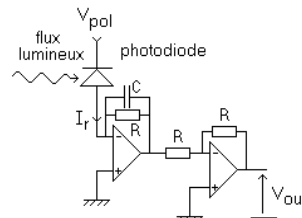
I_{obs} s'appelle courant d'obscurité (courant quand ϕ est nul) et ϕ représente la puissance optique reçue. En statique, on peut donc dire que le courant dans la photodiode est pratiquement proportionnel à la puissance lumineuse reçue. Dans notre cas, la puissance lumineuse provient de la LED et de l'éclairage ambiant (lumière naturelle et éclairage... attention aux fluctuations à 100 Hz apportées par ce dernier)

Régime dynamique : en dynamique, la photodiode peut être représentée de la façon suivante :



En pratique, on peut considérer que r_j (résistance de jonction) est pratiquement infinie et que r_s (résistance de connectique) est très faible. C_j est la capacité de jonction (elle est d'autant plus faible que la jonction est fortement polarisée en inverse). Le courant i_p est le courant résultant du flux lumineux ϕ .

Dans ce cas, l'ensemble photodiode + montage transconductance peut être représenté, pour ce qui concerne les variations par une fonction de transfert d'ordre 2.

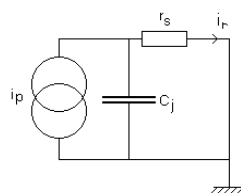


Pour comprendre ce point, on peut procéder de la façon suivante. Le courant i_r qui sort de la photodiode conduit à la tension v_{out} par l'intermédiaire d'une fonction de transfert telle que

$$v_{out}(p) = \frac{R}{1 + R \cdot C_j \cdot p} \cdot i_r(p)$$

Le rôle de l'amplificateur inverseur est de compenser le gain statique négatif du circuit transconductance, chargé de réaliser la conversion courant/tension.

Ce courant i_r est lié au courant i_p résultant du flux lumineux incident. Compte tenu de la structure du montage transconductance, pour trouver la relation entre i_p et i_r , on peut raisonner, en régime variable, à partir du schéma suivant :



on a alors

$$i_r(p) = i_p(p) \cdot \frac{1}{1 + r_s \cdot C_j \cdot p}$$

Globalement, on a donc

$$v_{out}(p) = \frac{R}{1+R.C.p} \cdot \frac{1}{1+r_s.C_j.p} \cdot i_p(p)$$

Le gain global de la boucle ouverte sera donc d'ordre supérieur strictement à 2. En effet, il faut ajouter à ce qui vient d'être calculé, la fréquence de coupure de la LED et les limitations en fréquence des amplificateurs opérationnels... Le système est donc potentiellement instable ce qui permet d'envisager d'utiliser la méthode de Ziegler Nichols.

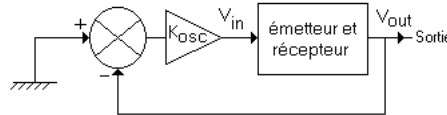
• comment déterminer un correcteur dans ce cas ?

Dans le cas de cet exemple, on pourrait, comme précédemment chercher à faire une identification de la boucle ouverte et en déduire un correcteur qui permettrait d'avoir la réponse désirée en boucle fermée. Cependant, dans le cas qui nous intéresse, il apparaît assez rapidement que l'ordre du système est au moins égal à 3 (à cause de la LED, des amplificateurs opérationnels, de la photodiode, de l'amplificateur de courant en sortie). Pour des systèmes d'ordre élevé, il n'est pas évident de déterminer précisément l'ordre auquel on peut se permettre de s'arrêter dans la modélisation (et donc dans l'identification).

Plutôt que de perdre son temps dans de fastidieuses et probablement infructueuses réflexions et expériences, on peut choisir d'adopter une méthode empirique, qui nous conduira directement à un correcteur satisfaisant (PI ou PID). Nous pouvons, par exemple, choisir la méthode de Ziegler Nichols, qui est adaptée à notre système

IV.5.2. Détermination du correcteur.

• Tout d'abord, on va identifier la réponse du système dans des conditions particulières. On fait en sorte de fermer la boucle d'asservissement. Le signal récupéré sur la photodiode est injecté sur l'entrée «-» du comparateur et l'entrée «+» est mise à la masse. En sortie du comparateur, on place un simple correcteur proportionnel de gain réglable. On règle ce gain jusqu'à la valeur K_{osc} pour laquelle on a apparition d'oscillations. On note alors K_{osc} , ainsi que T_{osc} , la période de ces oscillations.



• Ensuite, on déduit des valeurs obtenues les paramètres caractéristiques du correcteur P.I. par les relations suivantes :

$$K_c = 0,45.K_{osc} \quad \text{et} \quad T_c = 0,83.T_{osc}$$

rq : on rappelle que le correcteur P.I. a pour fonction de transfert

$$C(p) = K_c \cdot \left(1 + \frac{1}{T_c.p} \right)$$

• On remplace alors le correcteur proportionnel par le PI calculé, on applique la consigne désirée en entrée, et on constate :

- que le système est stable.
- qu'il est sans erreur statique

En appliquant une entrée de commande constante, on observe que la plage d'asservissement est restreinte. Pour les tensions négatives, la diode étant éteinte, il n'y a pas asservissement (plus de moyen d'action sur l'éclairage de la photodiode). Pour les valeurs de commande positives mais trop fortes, le niveau de courant injecté dans la LED nécessaire pour atteindre l'éclairage demandé ne peut pas être délivré par l'alimentation (ce qui permet de protéger la LED d'une destruction certaine).

En se plaçant dans la plage d'asservissement que nous venons de définir, on peut faire différentes observations.

A entrée de commande constante, si on écarte émetteur et récepteur (c'est-à-dire si on augmente la perturbation due à l'éclairage ambiant), on constate que la LED éclaire de moins en moins jusqu'à s'éteindre (l'asservissement cesse alors de fonctionner puisque l'on a perdu notre moyen d'action sur l'éclairage de la photodiode qui ne dépend plus alors que des perturbations ambiantes).

On peut également étudier la réponse dynamique de notre boucle (appliquer un signal offset + créneaux en entrée afin de solliciter le système dans sa plage d'asservissement). Ce temps de réponse peut être diminué en augmentant K_c , mais le fait d'augmenter K_c va finir par rendre le système instable... On met alors clairement en évidence le compromis existant entre rapidité et stabilité.

IV.6. Boucle à verrouillage de phase.

Dans bon nombre d'applications électroniques (télécommunications, instrumentation...), on doit pouvoir disposer de signaux indépendants, strictement à même fréquence. Par exemple, pour démoduler un signal, on va souvent devoir disposer de la fréquence de porteuse. Dans le cas d'un récepteur, il va souvent falloir reconstruire

la porteuse à partir du signal reçu. Il serait illusoire de chercher à fabriquer un oscillateur local ayant la même fréquence que celui qui a servi à la modulation. En effet, quand bien même on parviendrait à un instant donné à égaliser les deux fréquences, par la suite, les deux systèmes évoluant indépendamment (variations de température, vieillissement...), les fréquences seraient forcément proches, mais différentes. Pour une démodulation, ce faible écart est catastrophique...

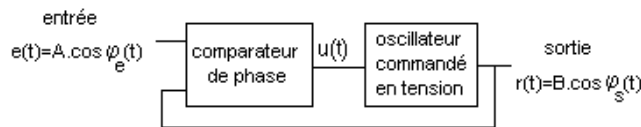
La boucle à verrouillage de phase permet d'éviter ce problème. Elle est principalement constituée d'un oscillateur commandé en tension, intégré dans une boucle d'asservissement, qui permet d'accrocher la fréquence de l'oscillateur sur une fréquence du signal d'entrée (dans l'exemple cité précédemment, on fera par exemple en sorte que cette fréquence soit celle de la porteuse si elle fait partie du signal modulé).

• Avant d'aller plus loin, on rappelle la notion de phase et de fréquence instantanées. Si on considère un signal $s(t) = S_m \cdot \cos(\varphi(t))$, on peut donner les définitions suivantes :

- $\varphi(t)$ est la phase instantanée
- la pulsation instantanée est $\omega(t) = d\varphi(t)/dt$
- la fréquence instantanée $f(t) = \omega(t)/2\pi$

IV.6.1. Présentation de la structure de la P.L.L.

Le système se présente sous la forme d'un système bouclé dans lequel on va trouver les éléments suivants :

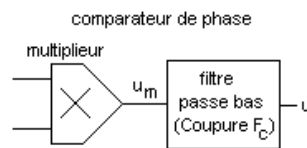


• Le comparateur de phase :

En statique, ce système doit fournir un signal $u(t)$ de la forme

$$u(t) = K_c \cdot (\varphi_e - \varphi_s)$$

Il existe plusieurs façons de le réaliser. L'une des méthodes consiste à réaliser une multiplication (avec un multiplieur ou un mélangeur) et à placer en sortie un filtre passe bas.

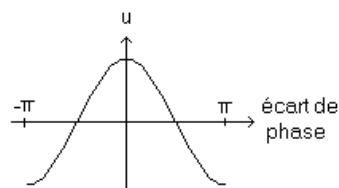


Dans ce cas, on récupère en sortie du multiplieur le signal

$$u_m(t) = k \cdot A \cdot B \cdot \cos(\varphi_e) \cdot \cos(\varphi_s) = \frac{k \cdot A \cdot B}{2} \cdot [\cos(\varphi_e + \varphi_s) + \cos(\varphi_e - \varphi_s)]$$

Si le système est asservi en fréquence, ce signal est voisin de la somme d'une sinusoïde de fréquence $2f_c$ avec un signal basse fréquence. Si le filtre passe-bas élimine le premier terme, on se retrouve avec

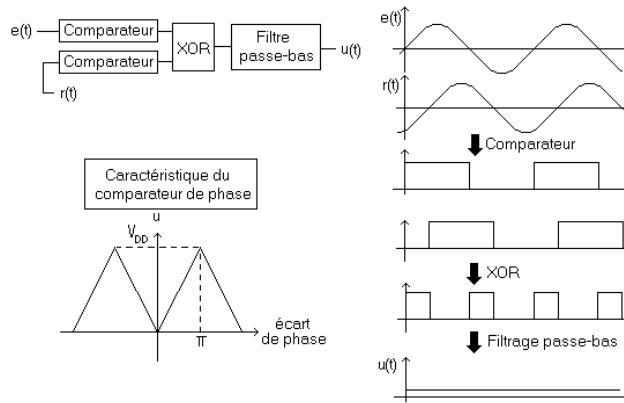
$$u(t) = \frac{k \cdot A \cdot B}{2} \cdot \cos(\varphi_e - \varphi_s)$$



La relation obtenue n'est pas linéaire. Cependant, si l'écart de phase, une fois la boucle accrochée se stabilise, alors on peut linéariser autour de ce point, pourvu que l'écart ne soit pas trop important. Alors, en raisonnant sur les variations, on a,

$$\tilde{u}(t) = k_{cp} \cdot (\tilde{\varphi}_e - \tilde{\varphi}_s)$$

rq : dans les systèmes numériques, on utilise une autre technique, qui consiste à transformer, via un comparateur, les signaux d'entrée et de sortie en des créneaux de même phase. Les deux créneaux obtenus sont envoyés dans un ou exclusif (XOR). On prend alors la valeur moyenne grâce à un filtre passe bas, ce qui permet de récupérer un signal réellement proportionnel à la variation de phase sur une plage de fréquence donnée.

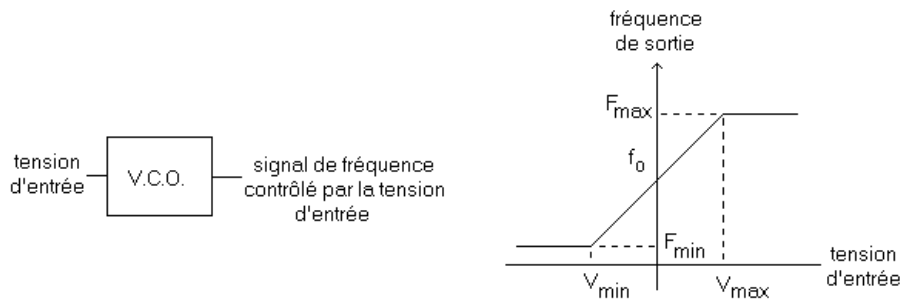


Entre 0 et π , la réponse du comparateur est donc de la forme

$$u = \frac{V_{DD}}{\pi} \cdot (\varphi_e - \varphi_s) = k_{cp} \cdot (\varphi_e - \varphi_s)$$

• L'oscillateur commandé en tension (V.C.O. = voltage controlled oscillator):

Un oscillateur commandé en tension a, en simplifiant, une caractéristique donnant une variation de fréquence évoluant linéairement avec la tension d'entrée pour une plage $[V_{min}; V_{max}]$. En revanche, en dehors de cette zone, la fréquence du signal de sortie est fixée à F_{min} ou F_{max} . La fréquence f_0 est appelée fréquence centrale du VCO.



Remarque : suivant les oscillateurs utilisés, la pente de la courbe précédente peut être positive ou négative.

IV.6.2. Fonctionnement de la boucle : capture et verrouillage.

- Pour décrire le comparateur de phase réalisé avec un multiplieur, nous avons fait l'hypothèse que le signal d'entrée de la boucle et le signal de sortie du V.C.O. avaient des variations de phase proches. Pour que cela soit vrai, il est nécessaire que la boucle soit verrouillée, c'est à dire que la fréquence du signal d'entrée prenne une valeur comprise dans une plage étroite qui dépend des éléments qui la composent.
- La plage qui permet au système de s'accrocher est appelée plage de capture (plage d'accrochage, "acquisition range"...). Elle est centrée sur la fréquence centrale du VCO et sa largeur dépend principalement de la fréquence de coupure du filtre passe-bas.
- Une fois que la boucle est accrochée, la plage de fréquence qui lui permet de rester dans cet état est appelée plage de verrouillage (plage de poursuite, plage de maintien, tracking range, lock range...). Cette plage dépend principalement de zone de fréquence dans laquelle le V.C.O. et le comparateur de phase se comportent linéairement. Elle doit être plus large que la plage d'accrochage...

Capture.

• Présentation du problème: On suppose que la boucle n'est pas accrochée. On rapproche progressivement la fréquence f_c du signal d'entrée de la fréquence centrale du V.C.O. f_0 . Dès que f_c rentre dans une plage de fréquence $[f_0 - F_{cap}; f_0 + F_{cap}]$, la boucle va s'accrocher et la fréquence de sortie du V.C.O. va atteindre f_c après un régime transitoire caractérisant la dynamique de la boucle...

• La boucle n'est pas encore accrochée.

Si $f_c < f_0 - F_c$, le V.C.O. oscille à f_0 . En effet, dans ce cas, le signal d'entrée présente les fréquences $f_0 - f_c$ et $f_0 + f_c$ qui sont toutes les deux supérieures à F_c ce qui fait que le signal en sortie du passe-bas est nul, d'où une fréquence F_0 en sortie de l'oscillateur.

On aurait pu raisonner en faisant décroître la fréquence d'entrée à partir d'un état où la boucle n'est pas accrochée ce qui aurait fait apparaître le caractère particulier de la fréquence $f_0 + F_c$.

• La boucle s'accroche: état permanent atteint par le système.

Lorsque f_e va rentrer dans la plage $[f_0 - F_c ; f_0 + F_c]$, il va apparaître une tension non nulle en sortie du filtre passe-bas, ce qui va faire évoluer la fréquence de sortie de l'oscillateur.

Pour comprendre l'évolution du système, on va présenter ce dernier en terme de système bouclé dans lequel tous les éléments ont un comportement linéaire (simplification).

On supposera que le filtre passe-bas est du premier ordre. On va faire un changement de variable, afin de travailler avec des fréquences f_e' et f_s' qui sont les écarts des fréquences d'entrée f_e et de sortie f_s à la fréquence centrale du V.C.O. f_0 . On pourra ainsi éviter de travailler avec des grandeurs continues, délicates à gérer en terme de variables de Laplace.

On a alors

$$f_s'(t) = f_s(t) - f_0 = K_0 \cdot u(t) \quad \text{soit} \quad f_s'(p) = K_0 \cdot u(p)$$

En terme de phase, on en déduit que

$$\frac{d\varphi_s'(t)}{dt} = 2\pi \cdot K_0 \cdot u(t) \quad \text{soit} \quad \varphi_s'(p) = \frac{2\pi \cdot K_0}{p} \cdot u(p)$$

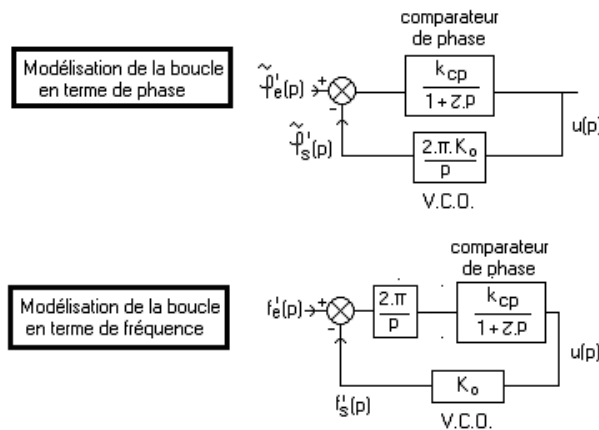
De plus

$$f_e' = f_e - f_0 = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d\varphi_e'}{dt} \quad \text{soit} \quad \varphi_e'(p) = \frac{2\pi \cdot f_e'}{p}$$

En linéarisant le comparateur de phase autour de son point de fonctionnement, on a

$$\tilde{u}(p) = \frac{k_{cp}}{(1 + \tau \cdot p)} \cdot (\tilde{\varphi}_e(p) - \tilde{\varphi}_s(p)) = \frac{k_{cp}}{(1 + \tau \cdot p)} \cdot (\varphi_e'(p) - \varphi_s'(p))$$

Les expressions précédentes permettent alors d'établir les schémas suivants :



La fonction de transfert en boucle fermée du système a la forme suivante :

$$\frac{f_s'(p)}{f_e'(p)} = \frac{\frac{2\pi \cdot k_{cp} \cdot K_0}{p \cdot (1 + \tau \cdot p)}}{1 + \frac{2\pi \cdot k_{cp} \cdot K_0}{p \cdot (1 + \tau \cdot p)}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2\pi \cdot k_{cp} \cdot K_0} \cdot p + \frac{\tau}{2\pi \cdot k_{cp} \cdot K_0} \cdot p^2} = \frac{1}{1 + \frac{2\pi \cdot m}{\omega_0} \cdot p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

On constate qu'il s'agit d'un système du second ordre avec

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2\pi \cdot k_{cp} \cdot K_0}{\tau}} \quad \text{et} \quad m = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2\pi \cdot k_{cp} \cdot K_0 \cdot \tau}}$$

Le gain statique de ce système vaut 1 ce qui signifie qu'en régime permanent, f_s' tend vers f_e' , et donc que f_s tend vers f_e .

remarque : La tension en entrée du V.C.O. reste nulle tant que la fréquence d'entrée n'est pas dans la plage de capture. Dès que f_e rentre dans cette plage, la tension u évolue afin que f_s tende vers f_e . Une fois que le système a atteint le régime permanent, u prend une valeur constante. Si on fait alors fluctuer lentement f_e par rapport à la dynamique de la boucle, u va suivre les évolutions de cette dernière ...

• Calcul du déphasage entre le signal d'entrée et le signal de sortie du V.C.O. :

Le signal de sortie de V.C.O. sera donc de même fréquence que la sinusoïde d'entrée. En revanche, une fois le régime permanent établi, on va vérifier que ces deux signaux sont déphasés l'un par rapport à l'autre

Dans le cas d'un comparateur de phase à base de multiplieur et de filtre passe-bas, le signal $u(t)$ est de forme

$$u(t) = k_{cp} \cdot \cos(\varphi_e(t) - \varphi_s(t)) = k_{cp} \cdot \cos \varphi(t)$$

En régime permanent, on a égalité de fréquence pour e(t) et r(t) et $\varphi(t)$ est constante. On peut donc écrire que

$$f_e = f_s = f_0 + k_{cp} \cdot K_0 \cdot \cos \varphi \quad \text{soit que} \quad \cos \varphi = \frac{f_e - f_0}{k_{cp} \cdot K_0}$$

Dans le cas particulier où $f_e = f_0$, on trouve donc que $\cos \varphi = 0$, ce qui signifie que le déphasage peut prendre les valeurs $+$ ou $-\pi/2$. La position stable dépend du signe du gain du V.C.O. et du comparateur de phase...

• Bilan :

On en déduit donc la plage dans laquelle la fréquence du signal d'entrée permet au système de s'accrocher:

$$[f_0 - F_c ; f_0 + F_c]$$

Le fait d'appliquer une sinusoïde dans cette plage en entrée de la boucle va permettre d'obtenir, en régime permanent, un signal r(t) de même fréquence mais déphasé.

Plage de verrouillage.

On suppose que la boucle a accroché. Si on fait augmenter f_e , initialement très voisin de f_0 , f_s suit f_e et le déphasage entre les tensions évolue.

La tension maximum, en sortie du VCO est appelée U_2 , la tension sur l'autre entrée du multiplieur (entrée de la boucle) est appelée U_1 et le gain du multiplieur est noté k . La tension en sortie du comparateur de phase est alors comprise entre $-U_{max}$ et $+U_{max}$ avec

$$U_{max} = k \cdot \frac{U_1 \cdot U_2}{2}$$

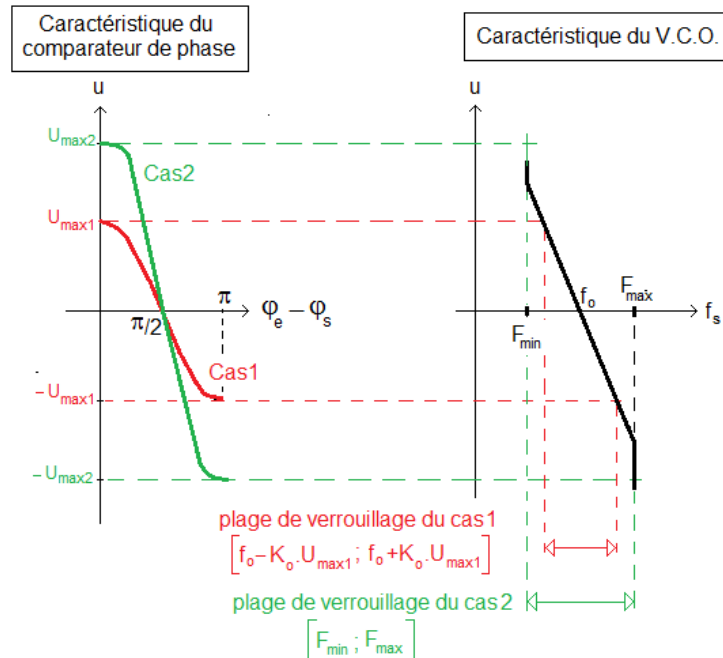
Si on suppose U_1 fixé, en jouant sur U_2 sur le VCO, on peut modifier U_{max} .

Si U_{max} reste assez faible pour que la fréquence de sortie du VCO reste suffisamment éloignée de F_{min} et F_{max} , la plage de verrouillage sera fixée par la non linéarité du comparateur de phase et égale à

$$[f_0 - K_o \cdot U_{max} ; f_0 + K_o \cdot U_{max}]$$

C'est le cas que l'on rencontre en général avec le dispositif expérimental décrit.

Si U_{max} devient supérieur à $(F_{max} - f_0)/K_o$ ou $(f_0 - F_{min})/K_o$, la plage de verrouillage sera fixée en partie par la non linéarité du VCO et aura une de ses bornes fixée à F_{min} ou F_{max} . Au maximum, elle sera bornée à $[F_{min}, F_{max}]$.

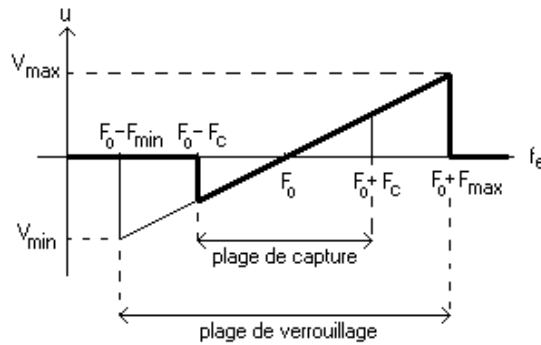


Le cas 1 correspond à une plage de verrouillage imposée par le comparateur de phase alors que le cas 2 correspond à une plage de verrouillage imposée par le V.C.O..

rq : En pratique U_{max} peut évoluer avec l'amplitude du signal d'entrée, ce qui signifie que la plage de verrouillage peut varier notablement suivant l'utilisation que l'on fait de la P.L.L.... Cette dernière joue le rôle d'un filtre passe-bande dont la fréquence centrale est réglable avec la fréquence centrale du VCO et dont la bande passante est également ajustable par l'intermédiaire de U_{max} , réglable avec le niveau de tension fourni par le VCO. Cependant, ce dispositif n'est évidemment pas un filtre linéaire !

Caractéristique statique générale.

On peut caractériser les différents états du V.C.O. suivant la fréquence du signal d'entrée sur la caractéristique suivante (on suppose ici que c'est le V.C.O. qui limite la plage de verrouillage):



En gras, on a représenté l'évolution de la tension du V.C.O. (image de la fréquence de sortie) pour un signal d'entrée présentant une fréquence croissante... A $f_0 - F_c$, on observe la capture, alors qu'à $f_0 + F_{max}$, on observe le décrochage (on sort de la plage de verrouillage)...

rq : les états transitoires n'ont pas été représentés... On suppose que l'évolution conduisant à cette caractéristique se fait de façon quasi-statique.

IV.6.3. Exemples d'applications de la boucle à verrouillage de phase.

La boucle à verrouillage de phase est un outil qui va pouvoir être utilisé à travers de très nombreuses applications. Nous allons en présenter deux. La démodulation de fréquence et la reconstruction de porteuse en vue de la réalisation d'une démodulation cohérente.

a/ Démodulation de fréquence.

• Si on envoie, en entrée de la boucle, un signal modulé en fréquence, dont une partie du spectre est dans la plage de capture, ce qui autorise l'accrochage, et dont l'ensemble du spectre est tout juste compris dans la plage de verrouillage, alors, l'oscillateur commandé en tension va reproduire le signal modulé en fréquence. L'intérêt de cette opération, c'est que la variation du signal d'entrée de l'oscillateur est proportionnelle à la variation de fréquence du signal de sortie. En effet, puisque la boucle est accrochée, on a

$$f_s(t) = f_o + K_o \cdot u(t)$$

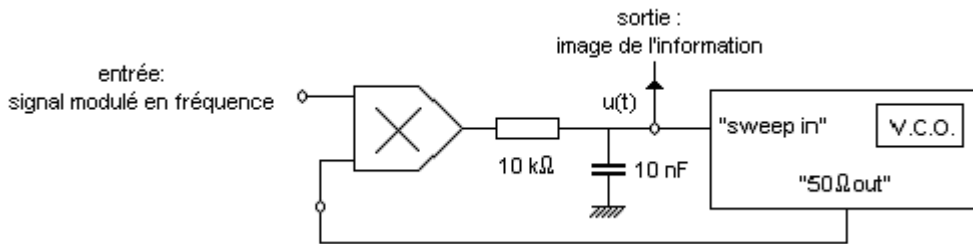
Pour un signal modulé en fréquence si $m(t)$ est l'information, on a également

$$f_s(t) = f_o + k \cdot m(t)$$

Finalement, on peut écrire que

$$u(t) = \frac{f_p - f_o}{K_o} + \frac{k}{K_o} \cdot m(t)$$

Pourvu que la plage de capture et la plage de verrouillage soient correctement adaptées au signal à démoduler, la boucle à verrouillage de phase est donc un démodulateur de fréquence.



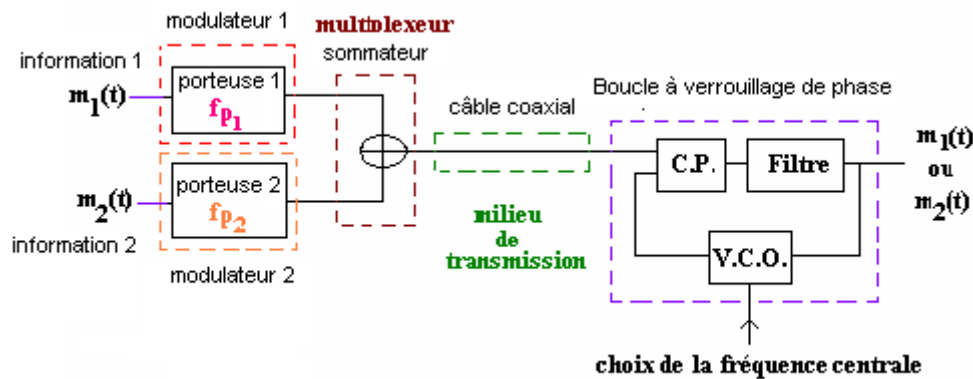
• Pour mettre en œuvre rapidement une démodulation de fréquence, on fabrique un signal modulé en fréquence avec une porteuse de quelques dizaines de kHz, d'amplitude 3 volts crête et une profondeur de modulation de quelques kHz. Comme modulante, on prend un simple signal sinusoïdal d'une fréquence voisine de la centaine de Hz. On règle la tension de sortie du V.C.O. à 3V crête et la fréquence centrale sur une fréquence la plus proche possible de celle de la porteuse.

On envoie alors le signal modulé sur la boucle, on synchronise sur la modulante, et on observe l'entrée du V.C.O. qui doit nous restituer une image du modulant. Il faut noter que le niveau des tensions joue sur la plage de verrouillage. Il faut souvent un peu d'ajustage pour obtenir un résultat correct. On peut également essayer une modulante en triangles ou en créneaux. Pour une fréquence de modulante trop élevée, la boucle va filtrer. Pour observer cet effet, on peut prendre une modulante en créneaux et augmenter sa fréquence jusqu'à quelques kHz.

- Application dans le cas d'un démultiplexage : Avec un tel système, on peut proposer une expérience permettant de réaliser un multiplexage avec deux signaux modulés en fréquence. Pour réaliser chaque signal modulé, on utilise un V.C.O. en appliquant le signal informatif sur l'entrée de balayage. Les signaux informatifs peuvent être pris sur la sortie analogique d'un walkman ou d'une radio. Comme V.C.O., les générateurs Agilent 33220 sont très pratiques pour ce type d'expérience, en raison de la grande finesse du réglage de la fréquence de porteuse et du réglage intégré de l'amplitude de modulation.

On règle l'amplitude de sortie des sources de signaux sonores afin que notre système démodule correctement chacun d'entre eux. Les porteuses de modulation sont choisies assez éloignées pour permettre une démodulation plus simple (on choisira 100kHz et 200kHz). En effet, si ces fréquences sont trop proches, on risque d'avoir un chevauchement des signaux modulés dans le domaine spectral.

Les deux signaux modulés sont additionnés. Pour cela, on utilise le comparateur du boîtier comparateur correcteur ENSC325 avec un correcteur proportionnel de gain 1 (deux inverseurs en cascade). On les transmet en même temps dans un câble coaxial qui est connecté à l'entrée de la boucle à verrouillage de phase. On peut observer en FFT le signal dans le câble et constater que l'on obtient effectivement deux spectres disjoints.



L'amplitude du signal de sortie du V.C.O. est réglée à 1,5V crête environ. Sur la boucle, il suffit de régler la fréquence centrale du V.C.O. de la boucle sur une valeur proche de f_{p1} ou de f_{p2} pour récupérer respectivement $m_1(t)$ ou $m_2(t)$. La sortie de la boucle (entrée du V.C.O. dans ce cas) est envoyée sur un amplificateur de puissance relié à un haut parleur.

Il faut noter que l'étape qui consiste à démoduler sur les deux canaux avec la même boucle est délicate et il qu'il faut souvent ajuster les différents niveaux de tension et la fréquence centrale avant d'avoir un résultat correct.

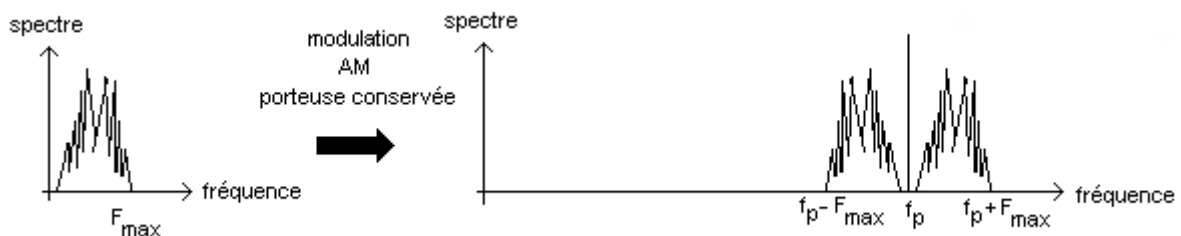
Une fois que l'expérience fonctionne correctement, on peut essayer, alors que l'on démodule sur une voie, de rapprocher la porteuse de l'autre voie, afin d'observer l'effet de superposition des spectres dans le canal de transmission. On constate que le son restitué est très perturbé, ce qui souligne l'importance d'un transport de l'information dans des plages de fréquences disjointes. Cette expérience est présentée sur un film associé.

b/ Reconstruction de porteuse : application à la démodulation d'amplitude.

Le spectre d'un signal modulé en amplitude, à porteuse conservée est de forme suivante :

$$s_m(t) = S_o \cdot (1 + m(t)) \cdot \cos(2\pi \cdot f_p \cdot t)$$

si $m(t)$ représente l'information et f_p la fréquence de porteuse



Pour démoduler un tel signal, on peut envisager de réaliser une détection cohérente. Pour cela, on multiplie le signal modulé par un signal sinusoïdal à la même fréquence que la porteuse, déphasé de ϕ par rapport à la porteuse de démodulation, ce qui nous donne une signal $s_i(t)$ (le facteur 1/10 représente le gain du multiplieur).

$$s_i(t) = S \cdot (1 + m(t)) \cdot \cos(2\pi \cdot f_p \cdot t) \cdot \frac{1}{10} \cdot S_d \cdot \cos(2\pi \cdot f_p \cdot t + \phi) = \frac{S \cdot S_d}{20} \cdot (1 + m(t)) \cdot (\cos \phi + \cos(4\pi \cdot f_p \cdot t + \phi))$$

Ensuite on filtre pour éliminer les fréquences voisines de $2 \cdot f_p$ et récupérer l'information à une constante près.

$$s_d(t) = \frac{S.S_d}{20} \cdot (1 + m(t)) \cdot \cos \varphi$$

On constate que pour récupérer un signal non nul, il faut éviter que la porteuse de démodulation soit en quadrature de phase par rapport à la porteuse de modulation.

Si on choisit une boucle à verrouillage de phase qui présente une plage de verrouillage centrée sur une fréquence proche de la porteuse et assez étroite pour ne pas mordre sur les bandes latérales et ainsi ne reproduire que la fréquence porteuse, on récupèrera en sortie une sinusoïde à une fréquence asservie sur la fréquence porteuse. En jouant légèrement sur la fréquence centrale du VCO de la boucle, ou en utilisant un circuit déphaseur, on pourra faire en sorte de s'éloigner suffisamment de la quadrature entre porteuse de modulation et porteuse reconstruite, ce qui donnera un niveau de signal suffisant en sortie de la détection cohérente.

IV.6.4. Réalisation pratique.

Il existe des composants électroniques qui comportent tous les éléments d'une boucle à verrouillage de phase, excepté le filtre (4046, ...). Cependant, il est également possible de réaliser une boucle avec des éléments séparés, ce qui est un peu plus pédagogique. Pour cela, on peut réaliser l'ensemble (comparateur de phase / filtre) avec un multiplieur analogique (AD633 par exemple) et un filtre passe bas de type RC. Comme oscillateur commandé en tension, on utilise un générateur avec une entrée de wobulation (« sweep in ») comme par exemple un générateur Thandar. On fixe la plage de capture avec le filtre RC (prendre quelques kHz de bande passante) et on choisit une fréquence centrale de l'oscillateur (fréquence pour l'entrée « sweep in » nulle) de quelques 100 kHz (par exemple 200 kHz).

On applique alors en entrée de la boucle un signal sinusoïdal de fréquence assez inférieure à 200 kHz (hors de la plage de capture). Dans ce cas, les deux oscillateurs sont non synchrones et si on les observe à l'écran, la trace dérive.

En augmentant la fréquence du signal d'entrée, celle-ci finit par rentrer dans la plage de capture et l'oscillateur commandé s'accroche sur le signal d'entrée. Les deux traces à l'écran sont alors stables et le restent tant que l'on est dans la plage de verrouillage (pourvu que la fréquence n'évolue pas trop vite).

Bibliographie :

- Pour tout ce qui concerne les problèmes généraux d'asservissement « Cours d'automatique », Tome 1, 2 et 3, Rivoire & Ferrier, Eyrolles. Le tome 1 reprend les généralités mathématiques (transformée de Laplace, annexe avec les expressions des réponses impulsionnelles de différents filtres, etc...) et le tome 2 traite des asservissements à proprement parler (actions des différents correcteurs, techniques d'indentification, etc...). Le tome 3 traite des asservissements numériques qui ne sont pas abordés dans ce cours.

- Pour les oscillateurs électroniques, j'ai essentiellement travaillé avec « Transmission de signaux », C. More, Tec & Doc pour les aspects généraux et avec « Introduction au diapason à quartz », J.M. Friedt et E. Carry, UDP, vol. 99 décembre 2005 pour les caractéristiques du diapason à quartz.

- Pour les exemples de systèmes asservis, la biblio est plus rare et ce qui a été écrit provient surtout des expériences montées au laboratoire. La biblio donnée ne répond donc qu'à une partie du problème.

Pour le capteur de courant à zéro de flux, concernant la modélisation du système, je me suis inspiré d'une partie d'un problème d'agrégation de génie électrique (épreuve C – 1995).

Pour l'asservissement de la tension de sortie d'un hacheur ou de la vitesse d'une MCC

- « Commande des machines à courant continu à vitesse variable » J.P. Louis, B. Multon & M. Lavabre, Techniques de l'ingénieur, D3III-3610

- « Alimentations à découpage – convertisseurs à résonance - principes, composants, modélisation » J.P. Ferrieux & F. Forest, DUNOD.

Pour la boucle à verrouillage de phase

- « Transmission de signaux », C. More, Tec & Doc