TP n°4 Cavités résonnantes en acoustique

Au cours de cette séance de TP, vous étudierez tout d'abord un résonateur acoustique simple illustrant les propriétés générales de la résonance dans les systèmes linéaires. Vous monterez en particulier le lien entre les oscillations libres et la réponse du système à une excitation harmonique. Dans la deuxième partie du TP, vous étudierez la réponse de deux résonateurs couplés, et l'influence du coefficient de couplage.

1 Présentation du résonateur de Helmholtz

1.1 Un peu d'histoire

Un des tout premier résonateur acoustique a été historiquement imaginé par Hermann Von Helmholtz. Pour analyser la structure de sons composés et pouvoir en extraire les différentes harmoniques, il utilisait une série de cavités sphériques de dimensions graduellement décroissantes, telles que leurs fréquences de résonance aillent en croissant d'une manière régulière : Pour analyser un son, on place successivement dans

Fig. 1 – Résonateurs historiques de Helmholtz

l'oreille les divers résonateurs en repèrant ceux qui donnent la sensation d'un renforcement considérable du son. Ainsi, il était possible d'effectuer une sorte d'analyse de Fourier rudimentaire qui permette de connaître les divers sons simples entrant dans la composition d'un son complexe, par exemple musical.

Hermann von HELMHOLTZ (Potsdam, 1821 – Charlottenburg, 1894) fut sans aucun doute l'un des grands savants du XIXe siècle. D'abord médecin militaire à Potsdam, il professe l'anatomie et la physiologie à Kônigsberg (aujourd'hui Kaliningrad), à Bonn et à Heidelberg. En 1871, il est chargé de la chaire de physique théorique à l'Université de Berlin. S'il reste aujourd'hui surtout connu pour ses recherches sur l'audition et la vision et sur leurs rapports avec la physique, la stature, la créativité et l'autorité de Son *Excellenz von Helmholtz* dominèrent toute la physique allemande de son époque. Dans un mémoire écrit en 1847, il énonce le principe de conservation de l'énergie, en affirmant que les phénomènes physiques ne sont que des changements de forme de l'énergie et en introduisant la notion d'énergie potentielle. Il mesure avec précision la vitesse de l'influx nerveux (1850) et élabore un *Traité d'optique physiologique* (1856).

Pour étudier l'intérieur de l'oeil et observer la rétine, il met au point un ophtalmoscope qui est encore en usage aujourd'hui. En 1858, il est l'auteur de travaux sur l'hydrodynamique des tourbillons. Il oriente ensuite ses recherches vers l'acoustique et étudie en 1862 la nature du son. D'après sa théorie, le timbre d'un son résulte du nombre et de l'intensité des composantes harmoniques associées au son fondamental. Pour identifier ces harmoniques et faire l'analyse et la synthèse des sons complexes, il imagine les résonateurs qui portent son nom et dont on voit un modèle posé sur la table.
A partir de 1870, il concentre son activité scientifique sur l'électrodynamique et oriente vers ce domaine les recherches de nombreux jeunes physiciens, dont en particulier Heinrich HERTZ. Pour interpréter les lois de Faraday sur l'électrolyse, HELMHOLTZ affirme en 1881 la nécessité d'attribuer à l'électricité comme à la matière une structure granulaire. Il fut également un grand administrateur de la science. Avec l'appui de Werner von SIEMENS, il bâtit et administra le Physikalisch-Technische Reichsanstalt de 1887 jusqu'à sa mort, en 1894. C'est dans ce fameux institut de métrologie, situé à Charlottenburg près de Berlin, que furent découvertes par Willy WIEN, Otto LUMMER et Heinrich RUBENS les lois du rayonnement du corps noir qui déterminent la répartition d'énergie lumineuse en fonction de la longueur d'onde. L'interprétation de cette loi grâce aux QUANTAS de Max PLANCK fut l'une des clés qui permit d'ouvrir le monde de la physique quantique.

1.2 Modèle théorique élémentaire

Considérons une cavité de grand volume interne V, communiquant avec l'atmosphère extérieur par un tube étroit de longueur l et de section S :

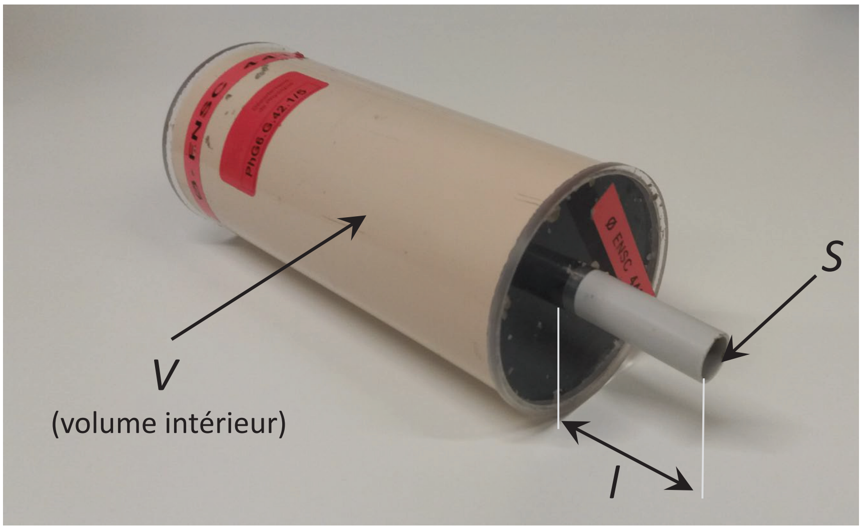

Fig. 2 – Cavité résonnante simple

On obtient une théorie simple du système [1] en supposant que l'air situé dans le petit tube oscille en bloc comme un bouchon de masse $m = \rho l S$ qui coulisserait sans frottement (ρ est la masse volumique de l'air). Le phénomène d'oscillation acoustique provient de l'élasticité de l'air contenu dans le grand volume V. Si le bouchon d'air situé dans le col est enfoncé vers l'intérieur, la surpression est positive et la force qu'il subit tend à le renvoyer vers l'extérieur ; s'il est déplacé vers l'extérieur, la surpression est négative et la force qu'il subit tend à le renvoyer vers l'intérieur. L'air contenu dans le grand volume V se comporte donc comme un ressort et, pour des mouvements de faible amplitude, la force F peut alors être consdérée comme une force de rappel élastique du style $F = -kx$ avec x la position par rapport à l'équilibre. Le résonateur d'Helmholtz est donc l'analogue exact d'un oscillateur mécanique masse-ressort ayant comme équation du mouvement :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + k\,x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

La surpression dans le volume de l'oscillateur est définie par $\delta p(t) = p(t) - p_0$ où p_0 est la pression atmosphérique et $p(t)$ la pression de l'air contenu dans le volume V.

1. Bulletin de l'Union des Physiciens BUP Vol. 96 Juin 2002

La force qui s'exerce sur l'air situé dans le col est donc :

$$F = (p - p_0)S = \delta p S = -kx \quad \Rightarrow \quad k = -\frac{\delta p S}{x}$$

La compressibilité adiabatique de l'air χ est par définition : $\chi = -\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial p}$ et pour un déplacement x de l'air situé dans le col, $\delta V = Sx$, on peut écrire :

$$\chi = -\frac{1}{V}\frac{\delta V}{\delta p} = -\frac{Sx}{V\delta p} \quad \Rightarrow \quad \delta p = -\frac{Sx}{\chi V}$$

donnant $k = S^2/\chi V$ et donc :

$$\omega_0 = c_s\sqrt{\frac{S}{Vl}} \quad \text{avec} \quad c_s = \frac{1}{\sqrt{\chi\rho}} \quad \text{la célérité du son dans l'air}$$

Les frottements sur l'air étant négligeables, la fréquence propre $f_0 = (c_s/2\pi)\sqrt{S/Vl}$ peut donc être assimilée à la fréquence de résonance du système oscillant. Si par exemple on souffle sur le goulot d'une bouteille, on s'aperçoit qu'il est possible de la faire *ronfler* à une fréquence particulière. Il se produit près de l'embouchure une forte amplification du son pour certaines fréquences sensibles, et notamment pour une fréquence plus basse que les autres qui est aussi la plus renforcée.
La théorie que nous venons de développer, et qui correspond aux approximations dites *de Helmholtz*, comporte bien évidemment des simplifications excessives. Détaillons certaines d'entre elles :
- Si nous considérons l'air qui entre et qui sort dans la cavité, nous avons supposé que dès que les molécules d'air ont franchi la section S du col, elles trouvent devant elles une très large section et que par continuité, leur vitesse tombe aussitôt à une fraction négligeable de leur vitesse dans le tube. On comprend bien que les couches d'air situées de part et d'autre du col doivent être entraînées dans le mouvement, et donc que la longueur effective de la masse d'air mobile notée l_{eff} sera plus grande que la longueur géométrique du col l modifiant d'autant la fréquence de résonnance :

$$f_0 = \frac{c_s}{2\pi}\sqrt{\frac{S}{Vl_{eff}}} \qquad l_{eff} = l + l_c \quad \text{avec} \quad l_c = \frac{8d}{3\pi} \quad \text{où } d \text{ est le diamètre du col (voir BUP)}$$

- Nous avons également implicitement supposé que toutes les molécules dans le col vibraient en phase avec la même vitesse instantanée. Cette approximation n'est valable que si la longueur d'onde, $\lambda_0 = 2\pi\sqrt{\frac{Vl}{S}}$ qui ne dépend que de la géométrie du système étudié, est beaucoup plus grande que la longueur du col, $\lambda_0 >> l$. Si on explore des fréquences nettement plus élevées que f_0, on trouvera que certaines fréquences génèrent un régime d'ondes stationnaires à l'intérieur même de la cavité. De nouvelles résonances vont ainsi apparaître, avec des fréquences caractéristiques correspondant de manière approximative aux pulsations propres d'un tube acoustique.

2 Travail expérimental

Pour réaliser les expériences, nous utiliserons le matériel suivant :
- Une ou deux cavités résonnantes avec différentes longueurs de tuyaux.
- Un haut-parleur placé en face du col du résonateur, et excité par un signal sinusoïdal ou impulsionnel provenant de la sortie amplifiée d'un système GBF+ampli.
- Un microphone amplifié inséré dans un petit trou de la cavité qui permettra de détecter la surpression à l'intérieur du volume V. Le signal de sortie sera visualisé sur un oscilloscope numérique.

2.1 Etude d'une cavité résonnante simple

1) En changeant directement la fréquence du GBF, déterminer la fréquence de résonance f_0 de la cavité pour une longueur l de col donnée. Prendre garde à ne pas saturer le signal.
La valeur de f_0 est-elle en accord avec celle donnée par la théorie pour les caractéristiques géométriques (V, l, S) du résonateur ? Calculer la valeur de λ_0.
Comment peut-on mesurer rapidement le facteur de qualité Q de ce résonateur ?

2) On utilise maintenant le GBF en mode *impulsion* envoyé au haut-parleur.
Qu'elle est l'utilité générale de ce mode pour un oscillateur ?
Réfléchir sur la durée d'impulsion adaptée au résonateur.
Mesurer la fréquence de résonance f_0 directement sur la FFT de l'oscilloscope.

3) A l'aide de la macro IGOR ; Acquisition - Connection USB - Oscilloscope, faire le spectre du signal et déterminer f_0. Déterminer le facteur de qualité Q.
Les différentes mesures de f_0 sont elles compatibles entre elles ? Incertitudes.

4) Refaire l'expérience en générant des impulsions directement à partir de la macro IGOR Acquisition - Connection USB - Générateur d'impulsions.

5) Par une technique de votre choix, mesurer la variation de la fréquence de résonance f_0 pour différentes longueurs l du col, et tracer la courbe : $\frac{1}{f_0^2} = f(l)$
Comparer avec le modèle théorique avec et sans la longueur effective du col.

2.2 Etude de deux cavités résonnantes couplées

Dans la suite du TP, on s'intéressera au comportement du système formé de deux résonateurs identiques, couplés entre eux par un tube de longueur h et de même section que le col cylindrique de chacun des résonateurs :

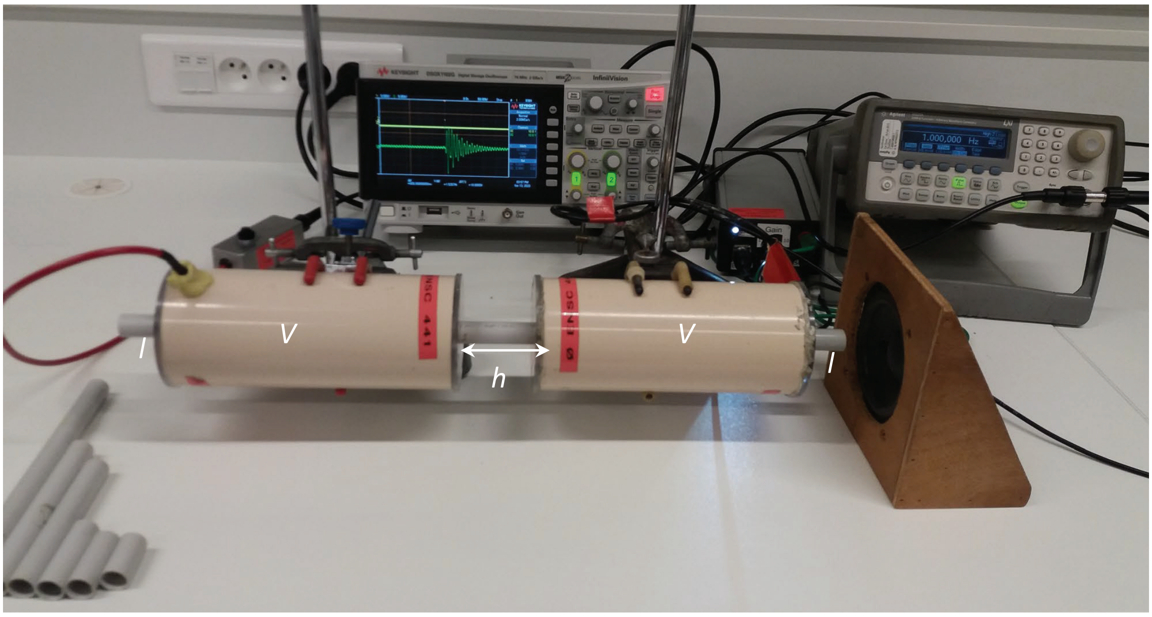

Fig. 3 – Résonateurs de Helmholtz couplés

En utilisant le même type de raisonnement qu'avec un système de masses-ressorts couplés :

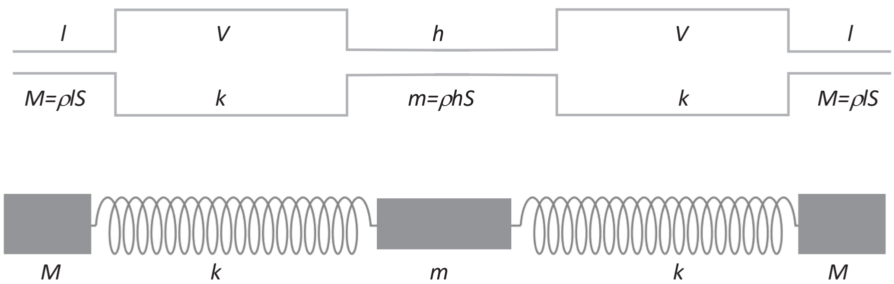

Fig. 4 – Equivalence masses-ressorts

nous pouvons montrer qu'il existe deux pulsations propres caractéristiques, ω_- et ω_+ telles que :

$$\omega_-^2 = \omega_0^2 \quad \text{et} \quad \omega_+^2 = \omega_0^2 + 2\Omega^2 \quad \text{avec} \quad \omega_0 = c_s\sqrt{\frac{S}{Vl}} \quad \text{et} \quad \Omega = c_s\sqrt{\frac{S}{Vh}}$$

Ω est la pulsation caractéristique du couplage et ω_0 la pulsation propre des résonateurs isolés. Le système des deux oscillateurs couplés présentera donc deux modes propres donc deux pics de résonance de fréquence f_- et f_+ :

1^{er} mode de couplage :

$$f_- = f_0$$

Les deux cavités effectuent des oscillations harmoniques de même fréquence basse f_- : ce régime correspond à un 1^{er} mode propre du système couplé. Les bouchons d'air (M) situés dans les cols, oscillent avec la même extension et les surpressions (positives ou négatives) dans les deux volumes oscillent donc en phase. Tout se passe comme si on avait deux oscillateurs harmoniques indépendants avec le bouchon d'air du couplage (m) restant immobile. A noter que pour des grandes longueurs h de tubes, la fréquence basse du système f_- s'éloigne de f_0 du fait de l'approximation $\lambda_0 >> h$ pas forcément réalisée.

$2^{ème}$ mode de couplage :

$$f_+ = \sqrt{f_0^2 + 2f_\Omega^2}$$

Les deux cavités effectuent des oscillations harmoniques de même fréquence haute f_+ : ce régime correspond à un $2^{ème}$ mode propre du système couplé. Les bouchons d'air (M) situés dans les cols, oscillent suivant des extensions opposées et les surpressions dans les deux volumes oscillent donc en opposition de phase, avec le bouchon d'air du couplage (m) étant mobile.

Etudier l'influence du couplage entre les deux résonateurs et tracer la variation de :

$$\frac{1}{f_+^2 - f_-^2} = f(h)$$