# Ondes stationnaires et progressives dans une chaîne linéaire d'oscillateurs

## Présentation Théorique

### *1 - Modèle physique et équation.*

La chaîne est constituée d'éléments mobiles en torsion reliés entre eux par deux fils de nylon parallèles. L'angle de rotation de l'élément *n* par rapport à sa position d'équilibre est noté $\theta_n$. Le couple de rappel $\Gamma$ exercé sur l'élément *n* par les éléments voisins est proportionnel à l'écart angulaire avec ces voisins :

$$\Gamma = -C(\theta_n - \theta_{n-1}) - C(\theta_n - \theta_{n+1})$$

Le moment d'inertie d'un élément étant *I*, l'équation du mouvement de l'élément *n* est :

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -C(\theta_n - \theta_{n-1}) - C(\theta_n - \theta_{n+1}).$$

soit, en posant $\omega_0^2 = \dfrac{C}{I}$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega_0^2(2\theta_n - \theta_{n-1} - \theta_{n+1})$$

Notons que la même équation serait obtenue pour un système de masses reliées par des ressorts en remplaçant *I* par *m* et *C* par la raideur du ressort *K*. La grandeur physique se propageant serait alors le déplacement, longitudinal ou transverse. Ce système modélise donc de façon simplifiée la propagation d'une onde plane dans un cristal monoatomique.
L'équation du mouvement sera donc écrite sous une forme générale :

$$[1] \quad \boxed{\frac{d^2x_n}{dt^2} = -\omega_0^2 \cdot (2x_n - x_{n+1} - x_{n-1})}$$

*x* étant le déplacement, angulaire ou longitudinal.

### *2 - Propagation dans la chaîne infinie.*

On cherche des solutions sous la forme d'une onde harmonique progressive :

$$[2] \quad \boxed{\underline{x}_n = x_0\, e^{i(\omega t - kna)}}$$

en injectant cette solution dans l'équation, on obtient :

$$\omega^2 x_n = 2\omega_0^2 x_n (1 - \cos ka)$$

équation qui admet une solution non triviale ($x_n \neq 0$) si

$$\omega^2 = 4\omega_0^2 \sin^2 \frac{ka}{2}.$$

En conservant la détermination $\omega > 0$, on obtient l'équation de dispersion :

$$[3] \quad \boxed{\omega = 2\omega_0 \, \sin\left|\frac{ka}{2}\right|}$$

***3 - Notion de zone de Brillouin.***

Le motif constituant la chaîne étant périodique de période *a*, le mouvement de l'ensemble des éléments de la chaîne est inchangé si le vecteur d'onde *k* est remplacé par $k_q = k + q\frac{2\pi}{a}$ ($q \in Z$). La propagation peut donc être entièrement décrite par des valeurs de *k* comprises dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a}\right]$. Cet intervalle est appelé zone de Brillouin.

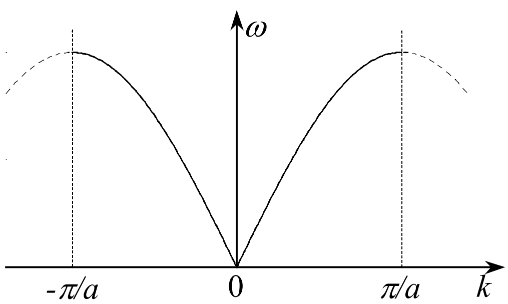


Fig. 2 : Représentation de la courbe de dispersion dans la zone de Brillouin.

***4 - Vitesse de phase - vitesse de groupe***

Sur la courbe de dispersion, on peut suivre graphiquement l'évolution de la vitesse de phase $v_\varphi = \frac{\omega}{k}$ et de la vitesse de groupe $v_g = \frac{d\omega}{dk}$. Pour un point donné ($k$, $\omega$), $v_\varphi$ est la pente de la corde issue de l'origine et $v_g$ la pente de la tangente en ce point.

Pour de faibles valeurs de *k*, ces deux pentes ont une même limite $v = \omega_0 a$. Dans cette zone, correspondant à des longueurs d'onde grandes devant *a*, la dispersion est négligeable et $v_g$ et $v_\varphi$ sont confondus.

Lorsque, au contraire, *k* s'approche de $\pi/a$, limite de la zone de Brillouin, la vitesse de phase diminue et la vitesse de groupe tend vers zéro. Pour $k=\pi/a$, ce qui correspond à une longueur d'onde de $2a$, deux éléments voisins vibrent en opposition de phase et l'onde devient une onde stationnaire.

***5 - Modes propres de la chaîne limitée***

Dans le montage physique, la chaîne a un nombre fini *N* d'éléments mobiles. Les éléments $n=0$ et $n=N+1$ sont fixes. L'équation du mouvement [1] reste valable pour les *N* éléments en tenant compte des conditions aux limites $x_0=0$ et $x_{N+1}=0$.

Recherchons les solutions pour lesquelles tous les éléments vibrent à une même fréquence $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$. La solution générale est une superposition d'ondes progressives de sens opposé : $\underline{x}_n = \underline{A} e^{i(\omega t - kna)} + \underline{B} e^{i(\omega t + kna)}$.

La condition $x_0$=0 impose $\underline{A} = -\underline{B}$ soit $x_n = -2i\underline{A}\ \sin(kna)\, e^{i\omega t}$

$x_{N+1}$=0 impose $k(N+1)a = p\pi$ avec $p$ entier, ce qui détermine la valeur de $k$ et du même coup la fréquence, liée à $k$ par la courbe de dispersion [3].

On trouve donc une série de *modes propres* caractérisés par un vecteur d'onde $k_p$ et une *fréquence propre* $\nu_p = \frac{\omega_p}{2\pi}$ tels que :

[4] $\boxed{k_p = \frac{p\pi}{(N+1)\,a}}$ $\boxed{\omega_p = 2\omega_0 \sin\frac{p\pi}{2(N+1)}}$

Pour un mode $p$ donné, le mouvement de chaque élément peut s'écrire :

[5] $\boxed{\underline{x}_n = \underline{\gamma}_p \cdot V_{pn} \cdot \exp(i\omega_p t)}$ avec $\boxed{V_{pn} = sin(k_p na) = sin\left(\frac{np\pi}{(N+1)}\right)}$

$\underline{\gamma}_p$ étant une constante complexe quelconque qui caractérise la phase et l'amplitude.

On constate sur l'équation [5] que le changement simultané de $p$ en $p'$=$-p$ et $\underline{\gamma}_p$ en $\underline{\gamma}_{p'} = -\underline{\gamma}_p$ donne exactement le même mouvement. On peut donc restreindre l'étude aux valeurs de $k_p$ positives. Les valeurs de $k_p$ étant par ailleurs limitées par la zone de Brillouin, $p$ peut prendre $N$ valeurs distinctes 1..$N$ (les valeurs 0 et N+1 donnant $V_{pn} \equiv 0$). Il y a donc $N$ modes propres distincts.

Le mouvement le plus général d'un élément quelconque $n$ peut s'exprimer comme une combinaison linéaire des mouvements correspondants à tous les modes propres :

[6] $\boxed{\underline{x}_n = \sum_{p=1}^{N} \underline{\gamma}_p \cdot V_{pn} \cdot \exp(i\omega_p t)}$

*Remarque* : Les conditions aux limites déterminent $N$ points régulièrement espacés sur la courbe de dispersion, points à partir desquels on peut reconstruire par interpolation la courbe de dispersion de la chaîne infinie. L'étude d'un système avec un nombre fini d'éléments permet donc d'avoir des informations sur le système infini, ce qui est beaucoup utilisé en calculs de simulation numérique.

### *6 - Résolution matricielle*

Les équations du mouvement [1] forment un système de $N$ équations différentielles couplées, système qui peut s'écrire sous forme matricielle :

[7] $\boxed{\frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial t^2} = -\omega_0^2 \cdot M \cdot \vec{X}}$

avec $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & -1 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{X}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \dots \\ x_n(t) \\ \dots \\ x_N(t) \end{pmatrix}$

La recherche des solutions sinusoïdales de cette équation conduit à résoudre :

$$[8] \quad \boxed{M \cdot \vec{X} = \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \cdot \vec{X}}$$

Les modes propres sont donc obtenus en diagonalisant la matrice *M*.
Les fréquences propres $\nu_p$ sont liées aux valeurs propres $\lambda_p$ par $\nu_p = \nu_0 \sqrt{\lambda_p}$ .
Les amplitudes des modes propres $V_{pn}$ sont les composantes des vecteurs propres $\vec{V}_p$. Ces amplitudes n'étant définies qu'à une constante multiplicative près, il est d'usage de normaliser les vecteurs propres par la condition: $\vec{V}_p \cdot \vec{V}_p = \sum_{n=1}^{N} V_{pn}^2 = 1$. On obtient alors une base de représentation orthonormée : $\vec{V}_p \cdot \vec{V}_q = \delta_{pq}$, $\delta_{pq}$ étant le symbole de Kronecker.

### *7 - Conditions initiales*

Avec les notations ci dessus, la solution générale du mouvement de la chaîne libre s'écrit :

$$[9] \quad \boxed{\underline{\vec{X}}(t) = \sum_{p=1}^{N} \underline{\gamma}_p \cdot \vec{V}_p \cdot \exp(i\omega_p t)}$$

Le mouvement est entièrement déterminé par la connaissance des positions et des vitesses en *t*=0. Les coefficients $\underline{\gamma}_p = \alpha_p - i\,\beta_p$ sont obtenus en projetant les vecteurs de conditions initiales $\vec{X}_0 = \vec{X}(0)$ et $\vec{X}'_0 = \frac{d\vec{X}}{dt}(0)$ sur la base des vecteurs propres :

$$\vec{V}_p \cdot \vec{X}_0 = Re\left[\vec{V}_p \cdot \sum_{p=1}^{N} \underline{\gamma}_p \cdot \vec{V}_p\right] = \alpha_p \qquad \vec{V}_p \cdot \vec{X}'_0 = Re\left[\vec{V}_p \cdot \sum_{p=1}^{N} i\omega_p \underline{\gamma}_p \cdot \vec{V}_p\right] = \omega_p\,\beta_p$$

# Etude expérimentale

## *1 - Dispositif expérimental*

La chaîne est constituée d'éléments métalliques reliés par deux fils de nylon parallèles. Le premier élément est relié à un vibreur électromagnétique permettant de transmettre une excitation. La liaison est rigide, de sorte que, lorsque le vibreur est au repos, cet élément, qui sera numéroté 0, peut être considéré comme fixe.
Le nombre $N$ d'éléments mobiles peut être choisi en immobilisant l'élément $N$+1 au moyen d'un obstacle réglable.
La détection du mouvement se fait au moyen d'un dispositif optique. Le faisceau d'une diode laser, après réflexion sur un des éléments, est reçu par un détecteur photoélectrique linéaire. La différence de courant sur les électrodes aux deux extrémités du capteur est proportionnelle à l'écart du spot par rapport au milieu de celui-ci. L'écart angulaire avec la position d'équilibre est ainsi transformé en signal électrique. Le dispositif de détection peut être positionné sur un élément quelconque, y compris l'élément 0.
Le signal électrique est enregistré sur un oscilloscope numérique relié à un ordinateur par liaison USB.

## *3 - Etudes possibles*

### *3.1 Etude des modes propres de la chaîne limitée*

Il est pratique d'effectuer cette étude sur une chaîne de 15 éléments mobiles en bloquant l'élément N°16.

#### *3.1.a Réponse impulsionnelle de la chaîne*

Une impulsion (*clac que l'on pourra faire à la main en donnant un coup bref*) sur l'élément 0 permet d'exciter simultanément tous les modes propres. La détection étant positionnée sur l'élément 15, on obtient directement l'ensemble du spectre de fréquences propres. On peut alors relever ces fréquences à l'aide du curseur.

*(i)* Construire la courbe de dispersion représentant $\omega_p = 2\omega_0 \sin\left|\frac{k_p a}{2}\right|$. En traçant $\omega_p$ en fonction de $\sin\left|\frac{k_p a}{2}\right|$ pour les valeurs de $k_p$ observées, il est possible de déterminer la fréquence de coupure $2\omega_0$.

*(ii)* A partir de ces mesures précédentes, construire la courbe de dispersion $\omega_p = f(k_p)$ pour toutes les valeurs de p qui peuvent exister sur la chaîne dans la première zone de Brillouin.

*(iii)* En déduire la courbe représentant la vitesse de phase $\omega_p / k_p = f(k_p)$ et la vitesse de groupe $d\omega \,/\, dk \; = f(k_p)$

*(iv)* En déduire la courbe représentant la vitesse de phase $\omega_p / k_p = f(\omega_p)$ et la vitesse de groupe $d\omega \,/\, dk \; = f(\omega_p)$.

*(v)* Etudier l'influence de la position de la détection sur les amplitudes relatives des pics de fréquence. On notera en particulier la disparition de certains pics lorsque la détection est positionnée sur les nœuds des modes correspondants.

*3.1.b Réponse de la chaîne en régime entretenu sinusoïdal*

Une excitation sinusoïdale à fréquence fixe (au moyen d'un générateur BF) permet de visualiser un mode propre isolé et d'étudier les régimes transitoires et permanents.

*(i)* Observer la position des nœuds et ventres pour les fréquences d'excitations correspondant aux fréquences propres $\omega_p$ . Comment se comporte la chaîne lorsuqe la fréquence excitatrice est supérieure à $2\omega_0$.

*(ii)* Etudier le facteur de qualité de la résonance d'un mode soit dans le domaine temporel par la décroissance de l'amplitude après la fin de l'excitation, soit dans le domaine des fréquences en ajustant la forme du pic sur une Lorentzienne. (attention, le spectre représente le module des composantes de Fourier).

## *3.2 Expériences complémentaires*

*3.2.a Propagation dans la chaîne "infinie"*

La chaîne comprenant une trentaine d'éléments seulement, elle n'est bien sûr pas infinie. Cependant, en envoyant un paquet d'onde de durée limitée et en détectant sur un élément pas trop éloigné de l'excitation, il est possible d'enregistrer le passage de l'ensemble du paquet avant d'être perturbé par la réflexion sur l'extrémité de la chaîne. Dans cet intervalle de temps, il n'y a aucune différence entre la chaîne finie et une chaîne infinie.

Plusieurs enregistrements sont effectués, sur des éléments de plus en plus éloignés de l'origine. Le tracé de ces enregistrements sur un même graphe, décalés en ordonnée d'une quantité proportionnelle à la distance à l'origine, permet alors de déterminer la vitesse de phase et la vitesse de groupe. On tracera pour cela une droite reliant les passages à zéro de l'amplitude et une autre reliant les positions du maximum de l'enveloppe. Pour différentes valeurs de la fréquence centrale, les vitesses ainsi mesurées peuvent être comparées à celles déduites de la courbe de dispersion obtenue sur la chaîne limitée.

*3.2.b Autres possibilités (liste non limitative)*

Comparer le spectre du signal enregistré sur un temps correspondant au premier passage du paquet d'onde et le spectre obtenu lorsqu'on enregistre sur un temps beaucoup plus long.

Que se passe t-il lorsque la fréquence centrale du paquet d'onde est égale à la fréquence de coupure ?

Chaîne contenant un élément plus lourd ou plus léger...